Equations avec des nombres complexes

Equations du premier degré

De même qu'une équation du premier degré avec des réels, le principe consiste à isoler le z.

Exemple

Résoudre $3z - 2i = 2 + 5z$.

Cette équation est équivalente aux lignes suivantes :

$3z - 5z = 2 + 2i$

$-2z = 2 + 2i$

$z = -1 - i$

Rappelons que deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelles et imaginaires sont respectivement égales

Exemple

Trouver z tel que $8z + 3i\bar{z} = 2 + 7i$

Commençons par trouver l'écriture algébrique du premier membre en posant $z = x + iy$

$8z + 3i\bar{z} = 8(x + iy) + 3i(x - iy) = 8x + 3y + i(8y + 3x)$.

Par identification, on a : $8x + 3y = 2$

Et : $3x + 8y = 7$

On résout, et on trouve : $-55y = -50$ d'où : $y = \frac{10}{11}$ et $x = -\frac{1}{11}$

Donc $z = -\frac{1}{11} + \frac{10}{11}i$

Equations du second degré

On utilise la même méthode que pour les réels avec deux nuances :

Il n'y a pas d'étude de signe possible

Si le discriminant est négatif, il y a deux solutions complexes conjuguées.

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, on utilise $\Delta = b^2 - 4ac$ et $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ si $\Delta < 0$.

- Attention : on n'écrit pas $\sqrt{-4}$ mais directement $i\sqrt{4} = 2i$

Exemple

Résoudre $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$\Delta = -4$ donc $z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

Lorsque les coefficients de l'équation sont complexes et non réels, on procède de même mais la difficulté réside dans la racine du discriminant. Soit, on « voit » la réponse immédiatement, soit on procède par identification.

Exemple

Trouver le nombre complexe z tel que $2i = z^2$.

Soit avec astuce, on remarque que $2i = 1 + 2i - 1 = 1 + 2i + i^2 = (1 + i)^2$

Soit on procède par identification : on pose $z = x + i y$. Alors : $x^2 - y^2 + 2ixy = 2i$ d'où par identification partie réelle, partie imaginaire : $x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 2$.
De plus, $|z^2| = |2i| = 2$ et $|z^2| = x^2 + y^2$ d'où $x^2 + y^2 = 2$.

En résumé : $x^2 - y^2 = 0$ donc $2x^2 = 2$ et $x^2 = 1$
$x^2 + y^2 = 2$ $x = 1$ ou $x = -1$
$xy = 1$ et $y = 1$ ou $y = -1$

Conclusion : $z = 1 + i$ ou $z = -1 - i$.

Equations de degré supérieur à 2

On se ramène au deuxième degré : soit par changement de variable, soit en faisant apparaître une racine évidente …
Parfois, la suite de l'exercice peut mettre sur la voie des racines évidentes, alors toujours bien lire l'exercice en entier avant de commencer

Exemple 1

Résoudre : $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$. On pose $Z = z$ et on obtient : $Z^2 + 5Z + 4 = 0$
$\Delta = 9$. $Z = -4$ et $Z' = -1$. D'où $z = 2i$, $z' = -2i$, $z'' = i$ ou $z''' = -i$.
Donc les solutions sont : $S = \{-2i; -i; i; 2i\}$.

Exemple 2

Résoudre : $z^3 + 2z^2 - 2z - 1 = 0$
On remarque que $z = 1$ est solution de cette équation, on factorise donc par $z - 1$:
$z^3 + 2z^2 - 2z - 1 = (z-1)(z^2 + 3z + 1)$

On résout $z^2 + 3z + 1 = 0$: $\Delta = 5$ donc $z = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $z' = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$

Les solutions sont donc : $S = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1\right\}$

Exercices

Résoudre :

1) $iz + 2(z - i) = 0$
2) $(z + 2i)(2z - 3 + i) = 0$
3) $z^4 - 9 = 0$
4) $z^2 - 3z + 4 = 0$
5) $z^3 + 1 = 0$
6) $z^4 + z^2 - 6 = 0$
7) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$
8) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$