

Exercice 1

Un entier naturel A est somme de deux carrés s'il existe deux entiers x et y non nuls tels que $A = x^2 + y^2$. On se propose de démontrer que si A est somme de deux carrés, A^n est aussi somme de deux carrés pour tout entier $n \geq 1$.

- 1) Pour x et y entiers, on pose $z = x + iy$. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $z^n = x_n + iy_n$ avec x_n et y_n des entiers
- 2) Démontrer que si $A = x^2 + y^2$ alors $A^n = x_n^2 + y_n^2$

Exercice 2

Soit a un réel de $[0; 2\pi[$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $2\sin^2 \frac{a}{2} z^2 - z \sin a + \frac{1}{2} = 0$

Exercice 3

Soit la suite des affixes (z_n) définie par $z_0 = 8$ et pour tout n entier naturel, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$

On note M_n le point d'affixe z_n

- 1) Montrer que z_3 est réel
- 2) Placer dans le plan les points M_i pour i allant de 0 à 3
- 3) Montrer que le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle

Exercice 4

On pose $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

- 1) Calculer u^7
- 2) On note $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$. Montrer que S et T sont conjuguées et que la partie imaginaire de S est positive
- 3) Calculer $S + T$, ST puis en déduire les valeurs exactes de S et T.

Exercice 5

Soient A et B d'affixes respectives 1 et -1 . On note f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distinct de A on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{\bar{z}(z-1)}{z-1}$

- 1) Déterminer l'image de O par f
- 2) Soit C le cercle de centre O et de rayon 1. Démontrer que M appartient à C équivaut à $f(M) = B$
- 3) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
- 4) Démontrer que pour tout $z \neq 1$, $|z| = |z'|$
- 5) Justifier que pour tout $z \neq 1$, le nombre $\frac{z'+1}{z-1}$ est réel
- 6) En déduire la valeur de l'angle $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM'})$ pour tout point M n'appartenant pas à C. Que peut-on en déduire pour les droites (AM) et (BM') ?
- 7) Justifier que les droites (AM) et (MM') sont orthogonales pour tout point M non situé sur l'axe réel
- 8) Le point M, distinct de A étant donné, déduire des questions précédentes une construction du point M'