Les indispensables sur les complexes

Les formules et le vocabulaire à connaître

Les écritures

Ecriture algébrique : x + i y (si fractions , pas de i au dénominateur)

Ecriture exponentielle : $re^{i\theta}$ avec r module et θ argument

Module

Par définition , le module d'un complexe est une distance

$OM = |z|$; $AB = |z_B - z_A|$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si z = x + i y

$|zz'| = |z||z'|$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$|z|^2 = z\bar{z}$

$|\bar{z}| = |z|$

Argument

Par définition , l'argument d'un complexe z correspond à l'angle formé par l'axe des abscisses positives et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec M d'affixe z

$\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$ avec arg(z) = θ

$\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2k\pi$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' + 2k\pi$

De plus : arg (nombre réel positif) = 0

arg (nombre réel négatif) = π

$\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$

Un pense bête

Correspondance entre les notations

	Notation complexe	Notation géométrique
Vecteur	$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$	$\overrightarrow{AB}$
Distance	$\lvert z_B - z_A \rvert$	AB
Angle	$\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$	$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

Mettre sous forme algébrique

On développe l'expression et on classe en séparant ce qui a des « i » et ce qui n'en a pas

En cas de fraction : on multiplie par le conjugué du dénominateur et on calcule

$$\frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{7+i}{10}$$

Les indispensables sur les complexes

Résoudre des équations

- Du premier degré : comme avec des x : on isole les z et on trouve z = …

$$2z-3=iz+4$$
$$2z-iz=4+3$$
$$z(2-i)=7$$
$$z=\frac{7}{2-i}=\frac{7(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{7(2+i)}{5}$$

- Du second degré : on utilise Δ et s'il est négatif , on fait apparaître i²

$z^2+2z+5=0$ $\quad\Delta$ = - 16 = (4i)² donc $z=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$

Des souvenirs de géométrie

- Si A' est l'image de A par une symétrie centrale de centre I : I est le milieu de [AA']
- Pour montrer que ABCD est un parallélogramme : juste montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ en montrant l'égalité des affixes
- Pour montrer que ABCD est un losange : parallélogramme + 2 côtés consécutifs égaux
- Pour montrer que ABCD rectangle : parallélogramme + 1 angle droit
- Pour montrer que ABCD carré : losange + rectangle
- Pour montrer deux droites perpendiculaires : ou produit scalaire

  Ou argument = $\frac{\pi}{2}$
- Pour montrer des points alignés : ou droites parallèles ou argument = π
- Si AM = BM alors M est sur la médiatrice de [AB]
- Si AM = r alors M est sur le cercle de centre A et de rayon r
- Si I milieu de [AB] alors $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- Si A' est l'image de A par une homothétie de centre B et de rapport k alors : $\overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BA}$

Comment traiter un exercice

Repérer l'unité (la surligner)
Faire une figure même si on ne le demande pas et la compléter au fur et à mesure
Lire une question en entier (c'est à dire toutes les sous questions qui sont dedans)
Bien lire la consigne : calculer , décrire , montrer , conjecturer , expliquer , construire …
Faire attention à la forme attendue : écriture algébrique , exponentielle , valeur approchée ou exacte , un module , une distance …
Avant de se lancer dans des calculs compliqués , regarder si dans les questions précédentes , il n'y a pas des chemins plus rapides .
Ne pas oublier que « en déduire » sous-entend que la question précédente permet de répondre

Les indispensables sur les complexes

Exemple

Lire cet énoncé avec un crayon et noter ce qui doit être remarqué et ce qui vient déjà à l'esprit pour aider à la résolution de l'exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique 1 cm) .

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes , l'équation suivante :

$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

2) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes a = $4\sqrt{3} - 4i$ et b = $4\sqrt{3} + 4i$

a) Ecrire a et b sous forme exponentielle .

b) Calculer les distances OA , OB , AB . En déduire la nature du triangle OAB .

3

Solution :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique 1 cm) .

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes , l'équation suivante :

$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$. Second degré donc on calcule delta

2) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes a = $4\sqrt{3} - 4i$ et b = $4\sqrt{3} + 4i$ il est possible que les solutions de la question d'avant donnent ces affixes

a) Ecrire a et b sous forme exponentielle .

b) Calculer les distances OA , OB , AB . modules En déduire la nature du triangle OAB .

on a les distances : les 3 mêmes = équilatéral ; si 2 mêmes penser à Pythagore pour regarder éventuel rectangle

Et maintenant , faire l'exercice !