Les lieux géométriques

Démonstrations de base

- Pour montrer qu'il y a un angle droit :

  Prendre les deux côtés, par exemple [AB] et [BC] et montrer que $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_B}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

- Pour montrer qu'un triangle ABC est isocèle en A :

  Montrer que $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

- Pour montrer qu'un triangle est équilatéral

  Soit montrer qu'il a trois côtés égaux
  Soit montrer qu'il est isocèle avec un angle de 60°.

- Pour montrer que ABCD est un parallélogramme

  Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire $z_B - z_A = z_C - z_D$

Lieux du type $|z-a| = |z-b|$

- Le grand classique :

  $|z-a| = |z-b|$: L'ensemble des points M d'affixe z est la médiatrice de [AB].

- Les originaux :

Toujours essayer de se ramener au cas classique, soit en factorisant, soit en remplaçant z par x + i y et en développant ensuite

> Remplacer z par x + iy est une méthode qui donnera toujours des résultats mais qui est souvent la plus longue ; il faut donc bien peser les risques et les avantages quand on ne veut pas chercher l'astuce !

$|az-b| = |az-c|$: factoriser dans les deux modules par $|a|$, puis simplifier

$|z-a| = |\overline{z}-b|$: utiliser $|Z| = |\overline{Z}|$ qui permet de remplacer $|\overline{z}-b|$ par $|z-\overline{b}|$

Exemple 1

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |z-2+6i|$

On pose A le point d'affixe 3 et B le point d'affixe 2 – 6 i.
Alors, on cherche M tel que AM = BM
M est donc sur la médiatrice de [AB]

Exemple 2

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |\overline{z}+5-8i|$

Puisque $|Z| = |\overline{Z}|$, alors $|z-3| = |\overline{z}+5-8i| = |z+5+8i|$

On pose A le point d'affixe 3 et B le point d'affixe – 5 – 8 i.
Alors on cherche M tel que AM = BM
M est sur la médiatrice de [AB]

Exemple 3

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|3iz+8| = |3iz-5+9i|$

Cette égalité est équivalente à : $\left|3i\left(z+\dfrac{8}{3i}\right)\right| = \left|3i\left(z+\dfrac{-5+9i}{3i}\right)\right|$

$$|3i|\left|z-\frac{8}{3}i\right| = |3i|\left|z-\frac{9+5i}{3}\right|$$

$$\left|z-\frac{8}{3}i\right| = \left|z-3-\frac{5}{3}i\right|$$

On pose A le point d'affixe $\dfrac{8}{3}i$ et B le point d'affixe $3+\dfrac{5}{3}i$ alors M est sur la médiatrice de [AB]

Exemple 4

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z+5-3i| = |3z+7+i|$

On pose z = x + i y. Il n'y a pas d'autre astuce ici !

$$|2x+5+(y-3)i| = |3x+7+(1+y)i|$$

$$(2x+5)^2+(y-3)^2 = (3x+7)^2+(1+y)^2$$

$$5x^2+22x+8y+16=0$$

$$y = -\frac{5}{8}x^2-\frac{11}{4}x-2$$

Donc M appartient à la courbe de la fonction f définie par f(x) = $-\dfrac{5}{8}x^2-\dfrac{11}{4}x-2$

Lieux de la forme $|z-a| = b$ avec b réel

Si b est un réel positif, alors on a un cercle de centre A et de rayon b

Si b est négatif, il n'y a pas de solution

Exemple

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-8+7i| = |3+5i|$

On remarque d'abord que $|3+5i| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On cherche donc M tel que $|z-8+7i| = \sqrt{34}$. On pose A le point d'affixe 8 – 7i. Alors M appartient au cercle de centre A de rayon $\sqrt{34}$.

Lieux avec des arguments

On cherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pm\dfrac{p}{2}$: Cercle de diamètre [AB] avec peut-être des points à enlever.

$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = kp$: Droite (AB) avec des points à supprimer.

Les lieux géométriques

Exemple 1

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z-2+8i}{z-1-i}\right)=\frac{\pi}{2}$

On pose A le point d'affixe 2 – 8 i et B le point d'affixe 1 + i.

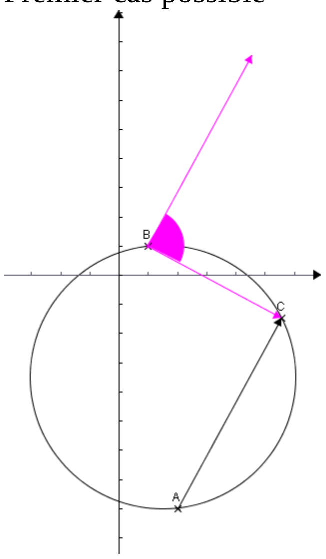
Alors on cherche M tel que : $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{2}$. Le triangle ABM est donc rectangle en M donc M est sur le cercle de diamètre [AB].

Etudions plus précisément la situation

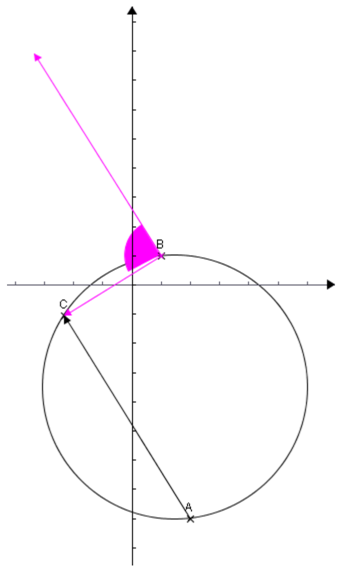
Tout d'abord, il ne faut pas que z soit égal à 1 + i car sinon le dénominateur est nul donc M doit être différent de B.

Ensuite, le point M peut-il être sur les deux demi-cercles de diamètre [AB] ? Faisons une figure

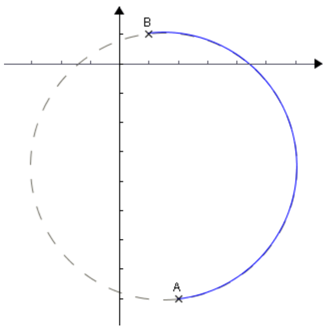
Premier cas possible



deuxième cas possible



Dans le premier cas : $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ (angle rose) et dans le deuxième cas $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}$.



Donc le deuxième cas ne convient pas.

La solution est donc le demi-cercle bleu privé de B.

On peut aussi dire : le demi-cercle de diamètre [AB] partant de A dans le sens direct, privé du point B.

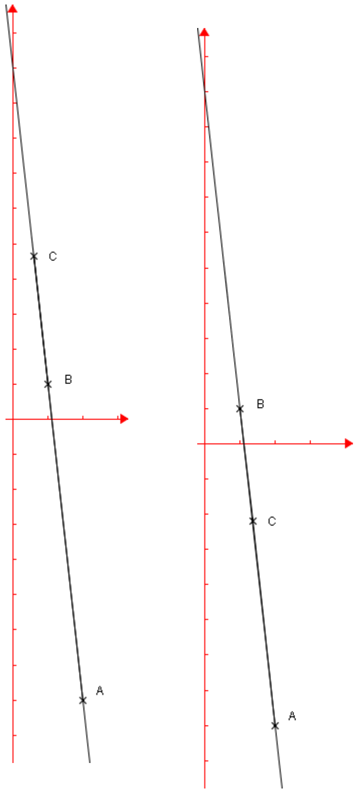
Exemple 2

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z-2+8i}{z-1-i}\right)=\pi$.

Avec les mêmes notations que dans l'exemple précédent, on doit trouver M tel que $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=-\pi$. On doit donc avoir les points A, B et M alignés.

Etudions de plus près la situation : M ne doit pas être en B comme précédemment.

Maintenant, M peut être sur le segment [AB] ou en dehors du segment. Là encore, aidons nous d'une figure :



On voit clairement que dans le premier cas, les deux vecteurs ont le même sens et donc $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}) = 0$ alors que dans le deuxième cas les vecteurs sont de sens opposés et $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}) = \pi$

On doit donc choisir M sur le segment [AB] privé du point B

Lieux qui utilisent les caractéristiques de z

- On souhaite z réel

  On utilise z = $\bar{z}$

  Ou $\arg z = k\pi$

  Ou Im z = 0

- On souhaite z imaginaire pur

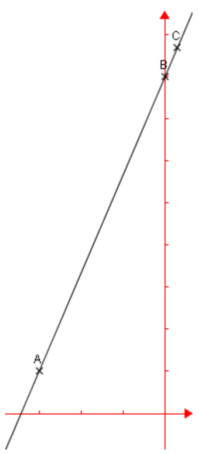
  On utilise z = - $\bar{z}$

  Ou $\arg z = \pm\dfrac{\pi}{2}$

  Ou Re(z) = 0

Exemple

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le nombre complexe $\dfrac{z+3-i}{z-8i}$ soit réel positif



Vu la forme de ce nombre complexe, on utilise l'argument :

$\arg\left(\dfrac{z+3-i}{z-8i}\right) = 2\pi = 0$ (à cause de positif).

On note A le point d'affixe – 3 + i et B le point d'affixe 8i. Alors on a $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) = 0$ donc M est sur la droite (AB) et comme dans le paragraphe précédent, avec une figure on détermine précisément la position de M. On a M sur la droite (AB) privée du segment [AB], M pouvant être en A.

Les lieux géométriques

Quelques conseils de bon sens

Bien lire les questions précédentes : parfois il y a des indications

S'il y a des conjugués dans l'expression, préférer des méthodes avec des conjugués

Poser z = x + i y uniquement lorsqu'on ne sait plus quoi faire : on peut commencer une autre méthode et à un certain stade passer à x + i y mais les calculs seront plus simples.

C'est sans doute la partie la plus délicate du chapitre, alors pas de découragement mais de la persévérance.

Exercices

Dans les exercices 1 à 4, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

Exercice 1

1) $|z-i| = |z+1|$
2) $|iz-1| = |z+2-i|$
3) $|2z-i| = |2-2z|$
4) $|-z+1| = |\bar{z}|$

Exercice 2

1) $|z+1-i| = \sqrt{2}$
2) $|-iz+i| = 2$
3) $|\bar{z}-i| = 5$

Exercice 3

1) $(z+1)(\bar{z}-2)$ est réel
2) $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ est réel
3) $\dfrac{z}{1-i}$ est réel
4) $\dfrac{2-\bar{z}}{3+z}$ est réel

Exercice 4

1) $\arg\left(\dfrac{z-2}{z+5i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
2) $\arg(z-i) = \dfrac{\pi}{2}$
3) $\arg z = \pi$

Exercice 5

Soient A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, - 2 + 3 i et 1 – i

1) Déterminer la nature de ABCD
2) Montrer que l'équation $z^2-(1+3i)z-6+9i=0$ admet une solution réelle et l'équation $z^2-(1+3i)z+4+4i=0$ une solution imaginaire pure.
   Développer $(z-3)(z+2-3i)$ puis $(z-4i)(z-1+i)$.
   En déduire les solutions de l'équation
   $\left(z^2-(1+3i)z-6+9i\right)\left(z^2-(1+3i)z+4+4i\right)=0$.
   Soit w la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de w
3) On appelle f l'application qui au point d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que z' = $z^2-(1+3i)z-6+9i$.
   On pose z = x + i y et z' = x' + i y'. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   Déterminer une équation de l'ensemble des points M pour lesquels f(M) appartient à l'axe des ordonnées.