Démonstration convergence 1

Théorème

Toute suite convergente est bornée

Démonstration

Le principe

On cherche à encadrer tous les termes de la suite

Pour se souvenir de la démonstration

La définition d'une suite convergente va donner un encadrement des termes à partir d'un certain rang . Il ne faut pas oublier les premiers termes qu'on encadre par le plus petit d'entre aux et par le plus grand .

Les pré requis de cette démonstration

La définition d'une suite convergente .

La démonstration

Soit la suite (u_n) convergente . On appelle L sa limite .

- *Encadrons (u_n) à partir d'un certain rang*

Alors , à partir d'un certain rang , tout intervalle ouvert contenant L contient aussi u_n .

On peut aussi traduire cette phrase par :

il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in \left]L-a;L+a\right[$ avec a réel .

l'intervalle ouvert est en fait un intervalle qui entoure L

On a donc obtenu que pour $n \geq N$, $L-a \leq u_n \leq L+a$, ces termes sont donc bornés .

- *Encadrons les premiers termes*

Les premiers termes de la suite sont connus *(même si on ne va pas s'amuser à les calculer , on sait qu'on pourrait le faire) .*

Puisqu'on a encadré à partir de n , les premiers termes sont donc : $u_1;u_2;u_3;....;u_{n-1}$

Parmi ces nombres , il y en a plus petit que tous les autres et un qui est plus grand que tous les autres : le minimum et le maximum .

On note m = minimum ($u_1;u_2;u_3;....;u_{n-1}$) et M = maximum ($u_1;u_2;u_3;....;u_{n-1}$) .

Alors , $m \leq u_k \leq M$ pour k allant de 1 à n – 1 .

- *Faisons le bilan pour encadrer tous les termes de la suite*

On a : pour $n \geq N$, $L-a \leq u_n \leq L+a$

Et $m \leq u_k \leq M$ pour k allant de 1 à n – 1 .

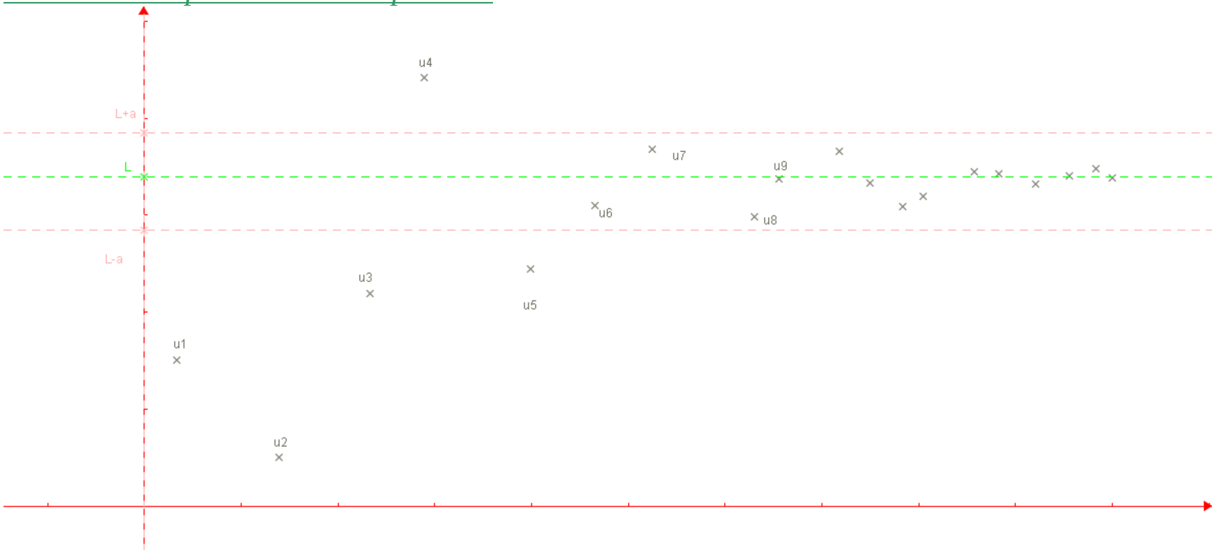
Puisqu'on veut un encadrement qui soit valable pour tous les n , il faut prendre le plus petit nombre :L – a ou m : on aura le minimum de (u_n) et en prenant le plus grand nombre L + a ou M , on aura le maximum de (u_n) .

Comme on ne sait pas lequel c'est , on note : A = min(L – a ; m) et B = max(L + a ; M) et on a : $A \leq u_n \leq B$ pour tout n

La suite est donc bornée

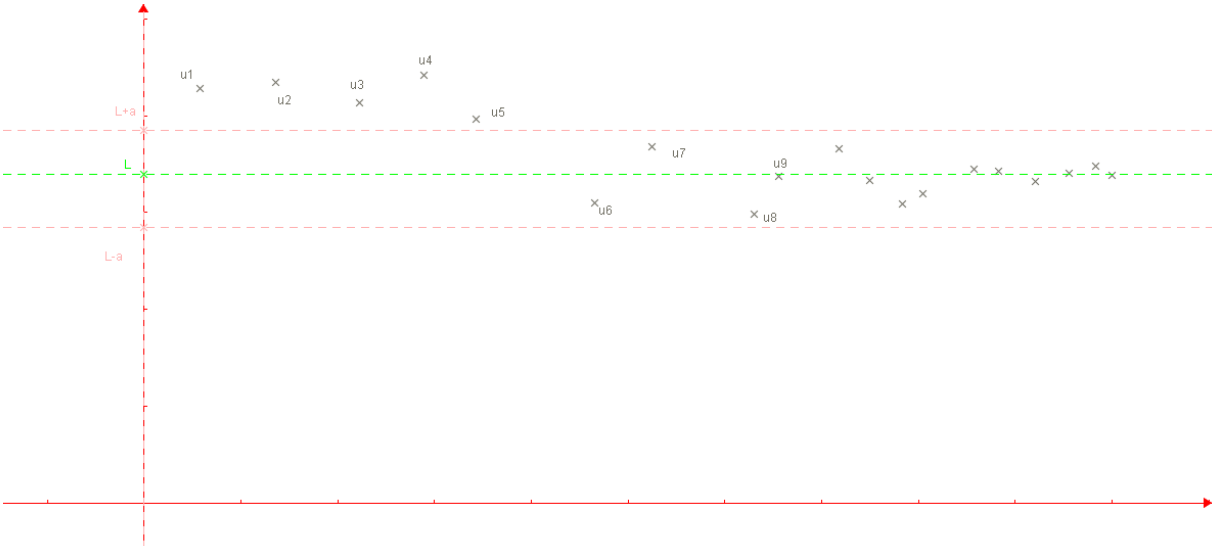
Démonstration convergence 1

Des schémas pour mieux comprendre



On a représenté une suite quelconque
On constate que sa limite est L
A partir de n = 6 , on a bien $L - a \leq u_n \leq L + a$
Pour les 5 premiers termes , le plus petit est u_2 donc m = u_2
Le plus grand est u_4 donc M = u4
Et pour le bilan : A = u_2 et B = u_4

Si on avait eu :



A partir de n = 6 , on a bien $L - a \leq u_n \leq L + a$
Le plus petit des 5 premiers est u_5 donc m = u_5
Le plus grand des 5 premiers est u_4 donc M = u_4
Pour le bilan : A = L – a et B = u_4

D'où la nécessité d'étudier en trois temps notre suite : à partir d'un certain rang , les premiers termes puis le bilan !