Démonstration du théorème des gendarmes

Théorème

Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) . On suppose que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n et que (u_n) et (w_n) sont convergentes et ont la même limite L .

Alors la suite (v_n) converge et a pour limite L .

Démonstration

Le principe

On montre que les trois suites appartiennent à un intervalle ouvert contenant L

Pour retenir la démonstration

On travaille à partir d'un certain rang mais ce rang est différent pour les trois suites : ne pas l'oublier .

Les pré requis

La définition d'une suite convergente vers un réel L

La démonstration

Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) . On suppose que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n et que (u_n) et (w_n) sont convergentes et ont la même limite L .

- *Définition d'une suite convergente*

On sait qu'une suite converge vers L si à partir d'un certain rang ses termes appartiennent à n'importe quel intervalle ouvert contenant L .

Un intervalle ouvert contenant L peut s'écrire sous la forme] L – a ; L + a [avec a réel quelconque .

- *Traduction de (u_n) et (w_n) convergent vers L*

Soit a un réel quelconque :

(u_n) converge vers L donc il existe un entier p tel que pour n > p , $u_n \in]L-a;L+a[$

(w_n) converge vers L donc il existe un entier m tel que pour n > m , $w_n \in]L-a;L+a[$

Si n > p alors $u_n \in]L-a;L+a[$ et si n > m alors $w_n \in]L-a;L+a[$

Donc si n est plus grand que m **et** p , on a à la fois $u_n \in]L-a;L+a[$ **et** $w_n \in]L-a;L+a[$.

- *On montre que (v_n) est dans le même intervalle à partir d'un certain rang*

On pose donc q = max(p ;m) .

Alors si n > q , $\begin{cases} u_n \in]L-a;L+a[\\ w_n \in]L-a;L+a[\\ u_n \leq v_n \leq w_n \end{cases}$ on a $\begin{cases} L-a < u_n \\ w_n < L+a \\ L-a < u_n \leq v_n \leq w_n < L+a \end{cases}$ et donc $v_n \in]L-a;L+a[$

Donc il existe un entier q tel que pour n > q , $v_n \in]L-a;L+a[$

Et par définition on a donc (v_n) converge et a pour limite L .

Il y a aussi le théorème des gendarmes pour les fonctions qui se démontre sur le même principe :

Démonstration du théorème des gendarmes

Théorème

Soient trois fonctions f , g et h définies sur un intervalle I . On suppose que pour tout x de I $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Alors $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Le « a » peut être fini ou infini

La démonstration

On démontre ce théorème dans le cas où a = $+\infty$

Soient trois fonctions f , g et h définies sur un intervalle I . On suppose que pour tout x de I $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$.

Définition d'une limite de fonction

On sait qu'une fonction f a pour limite L en $+\infty$ si pour un x assez grand , f(x) appartient à n'importe quel intervalle ouvert contenant L .

Un intervalle ouvert contenant L peut s'écrire sous la forme] L – b ; L + b [avec b réel quelconque .

Traduction de f et h ont pour limite L

Soit b un réel quelconque :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ donc il existe un réel A tel que pour x > A , $f(x) \in \left]L-b; L+b\right[$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$ donc il existe un réel B tel que pour x > B , alors $h(x) \in \left]L-b; L+b\right[$

Si x > A alors $f(x) \in \left]L-b; L+b\right[$ et si x > B alors $h(x) \in \left]L-b; L+b\right[$

Donc si x est plus grand que A **et** B , on a à la fois $f(x) \in \left]L-b; L+b\right[$ **et** $h(x) \in \left]L-b; L+b\right[$

On montre que g(x) est dans le même intervalle pour x assez grand

On pose donc C = max(A ;B) .

Alors si x > C , $\begin{cases} f(x) \in \left]L-b; L+b\right[\\ h(x) \in \left]L-b; L+b\right[\\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases}$ on a $\begin{cases} L-b < f(x) \\ h(x) < L+b \\ L-b < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+b \end{cases}$ et

donc $g(x) \in \left]L-b; L+b\right[$

Donc il existe un réel C tel que pour x > C , $g(x) \in \left]L-b; L+b\right[$

Et par définition on a donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$