Démonstration de la croissance comparée pour ln x

Propriété

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ pour n entier naturel non nul

Démonstration

Le principe

On compare la fonction ln x avec une autre et on utilise le théorème des gendarmes pour montrer la première

La deuxième et la troisième en découle .

Pour retenir cette démonstration

Poser f(x) = $\ln x - \sqrt{x}$ et étudier cette fonction

Les pré requis

La fonction ln x est dérivable et (ln x)' = 1/x

Ln 1 = 0

Les règles de calculs de ln x

La démonstration

- *Montrons la première formule*
  - *Etude d'une fonction*

Posons f(x) = $\ln x - \sqrt{x}$ alors f '(x) = $\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x} = \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{2x(2+\sqrt{x})} = \frac{4-x}{2x(2+\sqrt{x})}$

On cherche une limite quand x tend vers $+\infty$ alors on peut considérer que x est très grand et travailler dans l'intervalle $]4;+\infty[$.

Sur $]4;+\infty[$, $\frac{4-x}{2x(2+\sqrt{x})} < 0$ donc la fonction f est décroissante

De plus , f(4) = ln 4 – 2 = -0,6 < 0 donc la fonction f admet sur $]4;+\infty[$ un maximum négatif , on en déduit que f(x) < 0 sur $]4;+\infty[$

Et donc $\ln x < \sqrt{x}$ sur $]4;+\infty[$

  - *Encadrement de ln x / x*

Puisque x > 0 , on a aussi : $\frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

On a x > 4 , donc ln x > 0 puisque ln 1 = 0 et ln x strictement croissante

Donc $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc par le théorème des gendarmes , $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Démonstration de la croissance comparée pour ln x

Montrons la deuxième formule

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \text{ donc } \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right] = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\lim_{t\to+\infty} t\ln t = 0$$

Montrons la troisième formule

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{n\ln x}{nx^n} = \frac{1}{n}\times\left(\frac{\ln x^n}{x^n}\right)$$

Donc en appliquant la première formule : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^n}{x^n} = 0$, comme n est une constante , on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\times\left(\frac{\ln x^n}{x^n}\right) = 0$$

Une variante

Les pré requis

La croissance comparée pour l'exponentielle

Les fonctions ln x et e^x sont réciproques

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

La démonstration

On sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$

Or $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}}$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$