Démonstration croissances comparées

Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration

Le principe

On montre que $e^x > x^2/2$ et ainsi on utilise le théorème de majoration pour la conclusion

Pour retenir la démonstration

Poser $f(x) = e^x - x^2/2$ et dériver plusieurs fois pour avoir le signe de f .

Les pré requis

La fonction e^x est dérivable et $(e^x)' = e^x$.

La fonction e^x est strictement croissante

$e^0 = 1$

Si f > g et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (théorème de majoration)

La démonstration

- *Etude d'une fonction auxiliaire*

On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

Alors $f'(x) = e^x - x$. On ne sait pas étudier le signe de cette expression , donc on dérive une nouvelle fois :

On a : $f''(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 > 0$ si et seulement si $e^x > 1$ et donc x > 0 puisque $e^0 = 1$ et e^x strictement croissante .

On cherche une limite en $+\infty$, on peut donc travailler sur $[0;+\infty[$.

Sur cet intervalle , $f''(x) > 0$ et donc $f'(x)$ croissante sur $[0;+\infty[$

Or $f'(0) = 1$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$ et donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Or $f(0) = 1$ donc $f(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$

On peut faire les tableaux de variations successifs pour mieux visualiser

- *Minoration de la fonction dont on cherche la limite*

Puisque $f(x) > 0$, on a donc $e^x > \frac{x^2}{2}$ sur $[0;+\infty[$

Et donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ puisque x > 0

- *Conclusion sur la limite cherchée*

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc par le théorème de majoration , $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Démonstration croissances comparées

Des variantes

- On peut aussi demander de montrer $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout n entier naturel non nul en donnant comme pré requis ce qu'on vient de montrer : écrire $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times n^n$ et on peut appliquer la formule démontrée en posant X = $\frac{x}{n}$

- On peut aussi demander de démontrer $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ en donnant comme pré requis la formule $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$: on écrit $xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\left(\frac{-x}{e^{-x}}\right)$ et on a alors $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{-x}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{e^{-x}}\right) = 0$