Démonstrations raisonnements espace

Théorème du toit

Si une droite d est parallèle à deux plans sécants P et P’ alors d est parallèle à leur droite d’intersection

Le principe

On raisonne par l’absurde

On suppose que d est parallèle à des droites respectives de P et P’ mais qu’elle coupe leur droite d’intersection en un point M

La démonstration

On pose les notations

Soit D une droite de P telle que d et D parallèles .
Soit D’ une droite de P’ telle que d et D’ parallèles .
On appelle Δ la droite d’intersection de P et P’

Premier cas : D et D’ confondues

Alors D est dans P et dans P’ . Donc $\Delta = D$
Et d est bien parallèle à Δ

Deuxième cas : D et D’ distinctes

Puisque d est parallèle à D , si on montre que D est parallèle à Δ , alors d sera aussi parallèle à Δ .
On procède par l’absurde :
Supposons que D et Δ sont sécantes mais non confondues et notons M leur point d’intersection .
Alors M appartient à Δ donc à P et P’ .
D et D’ sont parallèles puisque toutes les deux parallèles à d
Et D et D’ parallèles strictement donc M étant sur D n’est pas sur D’ .
Donc M est un point de P’ non situé sur D’ .
Mais puisque D est parallèle à D’ et passe par M alors D est dans P’ .
Donc D est à la fois dans P et dans P’
Donc $\Delta = D$.
Contradiction .
Donc D est parallèle à Δ

Démonstrations raisonnements espace

Propriété

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites du plan

Le principe

On utilise les vecteurs

On utilise la définition : une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites du plan

La démonstration

Implication

Si D est orthogonale à un plan , elle est orthogonale à toutes les droites du plan donc en particulier à deux droites .

Réciproque

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$

Soient un point A et deux vecteurs $\vec{v}\ et\ \vec{w}$ non colinéaires du plan P tels que $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}\ et\ \vec{w}$
Par définition , $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$

Soit D' une droite quelconque de P
On va montrer que D et D' sont orthogonales

Soit $\vec{m}$ un vecteur directeur de D' .
Puisque D' est dans P alors il existe a et b tels que $\vec{m} = a\vec{v} + b\vec{w}$
Montrons maintenant que $\vec{u}$ et $\vec{m}$ sont orthogonaux :

$$\vec{u}\cdot\vec{m} = a\vec{u}\cdot\vec{v} + b\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$$

Donc D et D' orthogonales .