Démonstrations estimation

Propriété

Pour tout a de]0 ;1[, il existe un unique u_a tel que

$$\lim_{n\to+\infty} p(F_n \in I_n) = 1-a \; avec \; I_n = \left[p - u_a\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_a\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Démonstration

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p

On pose alors

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Alors par le théorème de Moivre -Laplace,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P(a < Z_n < b) = P(a < Z < b)$$

Avec Z qui suit une loi normale centrée réduite .

Par conséquent , pour tout a de]0,1[, il existe un unique u_a tel que

$$P(-u_a < Z < u_a) = 1-a \Leftrightarrow P\left(-u_a < \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < u_a\right) = 1-a$$

$$\Leftrightarrow P\left(np - u_a\sqrt{np(1-p)} < X < np + u_a\sqrt{np(1-p)}\right) = 1-a$$

$$\Leftrightarrow P\left(p - u_a\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} < F < p + u_a\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) = 1-a$$

$$\Leftrightarrow P\left(p - u_a\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < F < p + u_a\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

Propriété

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la variable aléatoire fréquence F est :

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Démonstration

On sait que

$u_a = 1{,}96 \; quand \; a = 0{,}05$ d'où le résultat .

Démonstrations estimation

Propriété

Les conditions : n > 30 , nf > 5 et n(1 – f) > 5 étant vérifiées alors l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Démonstration

$$f\in\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Leftrightarrow p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}<f<p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ \Leftrightarrow f-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}<p<f+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Nous savons que 0 < p < 1 . Posons f(p) = p – p² alors f '(p) = 1 – 2p . La fonction f admet donc un maximum en p = ½ qui vaut ¼ donc f(p) < ¼

$$f-1{,}96\frac{1}{4\sqrt{n}}<p<f+1{,}96\frac{1}{4\sqrt{n}}\Leftrightarrow f-\frac{0{,}49}{\sqrt{n}}<p<f+\frac{0{,}49}{\sqrt{n}}$$

Et donc puisque 0,49 < 1

$$f-\frac{1}{\sqrt{n}}<p<f+\frac{1}{\sqrt{n}}$$