## 1 Théorèmes de convergence



### A retenir

- 1. Si une suite  $(u_n)$  est croissante et convergente vers L alors  $(u_n)$  est majorée par L
- 2. Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$

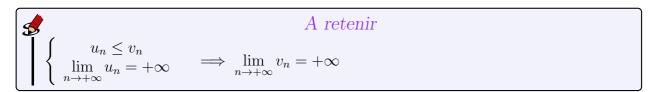
## Le principe

On utilise un raisonnement par l'absurde pour la première . Pour la deuxième démonstration , les définitions suffiront .

#### Les démonstrations

es ac	emonstrations
1. Ra	aisonnons par l'absurde :
	$\bullet$ Les hypothèses : Supposons que $(u_n)$ n'est pas majorée par L alors
	• On peut donc trouver un intervalle ouvert qui contient L :
	$\bullet$ La suite est croissante donc pour $n>p$ , on a :
	• La suite $(u_n)$ converge vers L donc par définition $u_n$ appartient à tout intervalle ouvert contenant L donc :
	• Contradiction entre $u_n > u_p$ et $u_n \in ]L-1; u_p[$ . Donc l'hypothèse de départ est fausse et donc $(u_n)$ est majorée par L .
2. Sc	pit une suite $(u_n)$ croissante non majorée.
	• $(u_n)$ non majorée donc pour tout réel A , il existe p tel que $u_p > A$ • La suite est croissante donc pour tout $n > p$ , on a :
	• Par définition , puisque pour tout réel A , $u_n$ appartient à un intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ , alors

# 2 Théorème de comparaison



## Le principe

On utilise les définitions

#### La démonstration

$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ donc } \dots$
$n \rightarrow +\infty$

- $\bullet \ u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang , donc il existe un entier p à partir duquel  $u_n \leq v_n$

# 3 Suite géométrique



### A retenir

Une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 tend vers  $\infty$  .

## Le principe

On va utiliser le théorème de comparaison

## La démonstration

•	Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison q strictement supérieure à 1 . Alors , on peur
	prendre a réel strictement positif et poser $q = a+1$ . On a donc : $u_n = u_0 q^n = u_0 (1+a)^n$

• On va montrer que  $\lim_{n\to+\infty} (1+a)^n = +\infty$ 

	15 1 1 5
	— Montrons d'abord que $(1+a)^n \ge 1 + na$ . On va procéder par récurrence :
	* Initialisation : pour $n=1$ , c'est immédiat .
	* Hérédité :
	$-\lim_{n\to+\infty}1+na=\dots$
	– Par le théorème de comparaison , on a alors : $\lim_{n \to +\infty} (1+a)^n = +\infty$
•	Etudions maintenant la limite de $(u_n)$ . Si $u_0 > 0$ , alors
	Si $u_0 < 0$ , alors