# 1 Les conjugués

**A retenir**

Soient z et z' deux nombres complexes . Alors on a :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
3. $\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$
4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
5. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$
6. $\overline{\overline{z}} = z$
7. Si $z = x + iy$ alors $z\overline{z} = x^2 + y^2$

### *Le principe*

Pour toutes ces démonstrations, on va écrire z et z' sous forme algébrique : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

### *Les démonstrations*

1. $\overline{z+z'} = \overline{x + x' + i(y+y')} = x + x' - i(y+y') = x - iy + x' - iy' = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} =$ ..........................................................................................
   ..........................................................................................................................
   ....................................................................................................
   De plus , $\overline{z}\,\overline{z'} = \overline{x+iy} \times \overline{x'+iy'} =$ ..........................................................................
   ..........................................................................................................................
   .................................................................
   On a donc bien : .......................................................
3. Par la relation précédente : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} \times \overline{z'} =$ .....................................................................
   ..........................................................................................................................
4. $z + \overline{z} =$ ...............................................................................................................
   .................
5. $z - \overline{z} =$ ...............................................................................................................
   ..........................................................................................................................
   ......................
6. $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} =$ ................................................................

7. $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) =$ ..........................................................................................................
...........................................................................................................................................

## 2 Les modules

*A retenir*

Soient z et z' deux nombres complexes :

1. $z\overline{z} = |z|^2$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|zz'| = |z||z'|$
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $|z^n| = |z|^n$ pour n entier naturel

### *Le principe*

On utilise la définition du module pour les trois premières puis la troisième pour démontrer les deux dernières

### *Les démonstrations*

1. On pose $z = x + iy$ . On a par définition : $|z| =$ ..........................................................................
........
De plus , $z\overline{z} =$ ........................................................................................................................
........................................................................................
2. $|z| =$ ..........................................................................................
$|\overline{z}| =$ .......................................................................................................................................
...........................................................................................................................................
3. $|zz'| = |(x+iy)(x'+iy')| =$ ...............................................................................................
...........................................................................................................................................
...........................................................................................................................................
...........................................................................................................................................
...........................................................................................................................................
.....
De plus : $|z||z'| = \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2} =$ ..................................................................
...........................................................................................................................................
................................... Donc $|zz'| = |z||z'|$

4. Par la relation précédente : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| \times |z'| =$ ........................................................................................................
   Donc : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

5. On va démontrer cette relation par récurrence .
   Initialisation : ........................................................................................................
   Hérédité : On suppose que pour un n donné , $|z^n| = |z|^n$ .
   Alors $|z^{n+1}| = |z^n \times z| =$ ........................................................................................................
   ........................................................................................................
   ........................................................................................................
   ........................................................................................................
   ........................................................................................................
   Conclusion , $|z^n| = |z|^n$ pour tout n .

# 3 Les arguments

*A retenir*

Soient z et z' deux nombres complexes .

1. $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$
2. $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$
3. $arg(z^n) = narg(z) + 2k\pi$
4. $arg(\overline{z}) = -arg(z) + 2k\pi$

### *Le principe*

On revient à la définition de l'argument et on utilise les formules de trigonométrie qu'il faut donc bien connaitre pour la première . Les autres en découlent .

### *La première démonstration : la plus technique*

Nous allons procéder avec la définition de l'argument .

- Notations : Soit $z = x + iy$ tel que $arg(z) = \theta$ .
  Soit $z' = x' + iy'$ tel que $arg(z') = \theta'$ .
  Soit $u = a + ib$ tel que $u = zz'$ . On pose $arg(u) = \alpha$

- But : Montrer que $arg(u) = \theta + \theta'$

- Traduction avec les affixes : $u = zz' \iff (x+iy)(x'+iy') = a+ib$
  $\iff xx' - yy' + i(xy' + x'y) = a + ib \iff a = xx' - yy' et b = xy' + x'y$

- Traduction avec les arguments : $cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|}$ et $sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|}$
  $cos(\theta') = \dfrac{x'}{|z'|}$ et $sin(\theta') = \dfrac{y'}{|z'|}$
  $cos(\alpha) = \dfrac{a}{|u|} = \dfrac{xx'-yy'}{|z||z'|}$ et $sin(\alpha) = \dfrac{b}{|u|} = \dfrac{xy'+x'y}{|z||z'|}$

- Première formule à démontrer :$cos(\theta+\theta') = cos(\alpha) = \dfrac{xx'-yy'}{|z||z'|}$:
  $cos(\theta+\theta') = cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')$
  Donc $|z||z'|cos(\theta+\theta') = |z|cos(\theta)|z'|cos(\theta') - |z|sin(\theta)|z'|sin(\theta') = xx' - yy'$
  Donc $cos(\alpha) = cos(\theta+\theta')$

- Deuxième formule à démontrer : $sin(\theta+\theta') = sin(\alpha) = \dfrac{xy'+x'y}{|z||z'|}$:
  ..............................................................................................................................................
  ..............................................................................................................................................
  ..............................................................................................................................................
  ..............................................................................................................................................
  ..............................................................................................................................................
  ..............................................................................................................................................
  ..............................................................................................................................................
  .....................................................

- On a donc $\alpha = \theta + \theta' + 2k\pi$

**Attention**

$cos(\theta+\theta') = cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')$
$cos(\theta-\theta') = cos(\theta)cos(\theta') + sin(\theta)sin(\theta')$
$sin(\theta+\theta') = sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta')$
$sin(\theta-\theta') = sin(\theta)cos(\theta') - cos(\theta)sin(\theta')$

## Une autre version de la première démonstration

On utilise l'écriture trigonométrique : ce sont les mêmes calculs mais la présentation gagne en élégance .

## Les autres démonstrations

- $arg\left(\dfrac{z}{z'} \times z'\right) = arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) + arg(z')$ par la formule précédente
  donc $arg(z) = arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) + arg(z')$

- On procède par récurrence .
  Initialisation : $arg(z) = arg(z)$ Vrai au rang n $= 1$
  Hérédité : On suppose que pour un n donné , $arg(z^n) = narg(z)$ .
  $arg(z^{n+1}) =$ ..........................................................................................................................
  ..........................................................................................................................................
  ..........................................................................................................................................
  .......................................................................

- Posons $z = x + iy$ avec $arg(z) = \theta$ alors $\overline{z} = x - iy$ . Posons $arg(\overline{z}) = \theta'$ .
  $x = |z|cos(\theta)$ et $y = |z|sin(\theta)$ . On a alors $-y = -|z|sin(\theta) = |z|sin(-\theta)$ donc ...............
  ..........................................................................................................................................
  ..........................................................................................................................................
  ..........................................................................................................................................
  ......

# Angles et longueurs

**A retenir**

Soient $A(x_A; y_A)$ d'affixe a , $B(x_B, y_B)$ d'affixe b et $C(x_C; y_C)$ d'affixe c alors :

1. $AB = |b - a|$
2. $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right) = arg(b - a) + 2k\pi$
3. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) + 2k\pi$

## *Le principe*

On utilise les définitions .

## *Les démonstrations*

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = b - a =$ ..............................................................................................................
   .......................................................
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$ .................................................
2. Soit un point M d'affixe z tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ . Par définition , $arg(z) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$ .
   Or $z - 0 =$ ..............................................................................................................................
   ..........................................................................................................................................
   ..........................................................................................................................................
   ......

3. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AC}\right)$

   ..............................................................................................................
   ..............................................................................................................
   ..............................................................................................................
   ..............................................................................................................

# Réel ou imaginaire pur

**A retenir**

1. 
   - z est réel si et seulement si $z=\overline{z}$
   - z est imaginaire pur si et seulement si $z=-\overline{z}$
2. 
   - z est réel si et seulement si $arg(z)=k\pi$
   - z est imaginaire pur si et seulement si $arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

## *Le principe*

On utilise simplement les définitions .

## *Les démonstrations*

1. 
   - Soit $z=x+iy$ . Alors : $z=\overline{z}\iff$ ..............................................................................
     ..............................................................................................................
     ..............................................................................................................
     ....................................................................
   - $z=-\overline{z}\iff$ ..............................................................................................................
     ..............................................................................................................
     ..............................................................................................................
     ..............................................................................................................
2. 
   - Soit $z=re^{i\theta}$ avec r réel positif . Alors : $arg(z)=k\pi\iff$ ........................................
     ..............................................................................................................
     ...............................
   - $arg(z)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\iff$ ..............................................................................................
     ..............................................................................................................
     ..........................................................................................

# La forme exponentielle

*A retenir*

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta + 2k\pi$
3. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
5. Formule de Moivre : $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$
6. Formules d'Euler : $cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

### *Le principe*

On utilise les propriétés précédentes et la définition de l'écriture exponentielle :
$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ .

### *Les démonstrations*

1. $|e^{i\theta}| = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} =$ ........................................................
2. C'est la définition de l'écriture trigonométrique .
3. Soient $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$ alors $arg(zz') =$ ............................................................................
   ........................................................................................ .
   De plus , $|zz'| =$ ...........................................................................
   Donc $zz' = 1e^{i(\theta+\theta')}$
4. Soit $z = e^{i\theta}$ , alors $|\overline{z}| =$ ....................................................
   Et $arg(\overline{z}) =$ ..............................................................................................................
   Donc $\overline{z} = 1e^{-i\theta}$
5. Par récurrence . L'initialisation est immédiate pour n=1 .
   Hérédité :On suppose que pour un n donné , $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ , alors :
   $e^{i(n+1)\theta} =$ ...........................................................................................................................
   .........................................................................................
6. On a : $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ et $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$ . On ajoute et on obtient la première formule d'Euler . On soustrait pour la deuxième .