1 Unicité de la fonction exponentielle

A retenir

La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)\ \forall x$

Le principe

Pour démontrer l' unicité , on utilise un deuxième objet.

La démonstration

- Soit g une fonction telle que $g(0) = 1$ et $g'(x) = g(x)$
- Posons $h(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$ pour tout x .
- Procédé qui va être suivi : montrer $h'(x) = 0\ \forall x$ puis $h(x) = 1\ \forall x$ et donc $g(x) = e^x\ \forall x$
- $h'(x) =$ ....
- $h'(x) = 0\ \forall x$ donc h est une fonction constante . Or $h(0) =$ .... Donc $h(x) = 1\ \forall x$
- Conclusion : $g(x) = e^x\ \forall x$ donc la fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$

2 La relation fonctionnelle

A retenir

La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous x et y réels et $f'(0) = 1$

Le principe

On montre que la fonction exponentielle vérifie la formule en utilisant une fonction auxiliaire . Puis , on démontre la réciproque .

La démonstration

- La fonction exponentielle vérifie bien la formule :
  - On sait que $e^0 = 1$ et que $(e^x)' = e^x$.

  - On pose $g(x) = \dfrac{e^{x+y}}{e^x}$ $\forall x$ pour un y quelconque .
  - Puisque g est en fonction de x , y est considérée comme une constante donc $g'(x) =$ ....
    On peut donc en déduire que g est ....
  - $g(0) =$ ....
  - On a donc : $g(x) = e^y$ et $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous x et y réels .
  - $(e^x)' = e^x$ donc la fonction $f(x) = e^x$ vérifie $f'(0) = 1$

- Réciproque : Si une fonction f vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous x et y réels et $f'(0) = 1$, alors $f(x) = e^x$ $\forall x$
  - Montrons d'abord que $f'(x) = f(x)$ $\forall x$
    On dérive $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à x :
    $f'(x+y) = f'(x)f(y)$ $\forall (x, y)$
    Prenons , $x = 0$: ....
  - Déterminons maintenant $f(0)$:
    $f(0+y) = f(0)f(y)$ $\forall y \iff f(y) = f(0)f(y)$ $\forall y$
    donc $f(0) = 1$
  - Par définition de la fonction exponentielle , ...

3 Les propriétés algébriques

A retenir

1. $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
2. $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
3. $e^{nx} = (e^x)^n$ pour tout n entier naturel non nul .

Le principe

On applique la relation fonctionnelle

Les démonstrations

1. $e^{x-y}e^{y}\ =$ ....
   ....
   ....
   ....
2. On utilise la formule précédente : $\dfrac{e^0}{e^x} = e^{0-x}$
3. Par récurrence , l'initialisation est immédiate avec $n = 1$
   Hérédité : on suppose que pour un n donné , $e^{nx} = (e^x)^n$, alors :
   ....
   ....
   ....
   ....

4 Les propriétés de la fonction exponentielle

A retenir

1. $e^x > 0\ \forall x$
2. La fonction e^x est strictement croissante pour tout x réel
3. $a < b \iff e^a < e^b$ pour tous réels a et b .

Le principe

On applique les définitions

Les démonstrations

1. $e^x = e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}} = (e^x)^2 \geq 0$.
   Supposons qu'il existe un x tel que $e^x = 0$, alors : $e^{x+y} = e^xe^y \iff$ ....
   ....
   ....
   Donc $e^x > 0\ \forall x$
2. ....
   ....
3. Par définition d'une fonction strictement croissante .

5 Les limites simples

A retenir

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
3. Comportement à l'origine : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Le principe

Pour la première , on va comparer deux fonctions .
La deuxième découle directement de la première .
La troisième utilise le nombre dérivé .

Les démonstrations

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$

1. On pose $f(x) = e^x - x$. On étudie cette fonction :
   $f'(x) =$ ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   Par lecture du tableau de variations , on a : $f(x) > 0$, donc ....
   ...... $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par le théorème de comparaison , ...
   ....
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}}$. Or ....
   .... Donc ....
3. Posons $f(x) = e^x$. Alors , par définition du nombre dérivé :
   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \iff$ ....
   ....

Attention

Soit f une fonction dérivable en a , alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$