Démonstrations fonction logarithme népérien

1 Existence de la fonction logarithme népérien

> **A retenir**
> La fonction logarithme népérien est la fonction qui à t réel strictement positif , associe x réel tels que $e^x = t$
> $ln1 = 0$

Le principe

On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires avec la fonction exponentielle

La démonstration

Par étude de la fonction exponentielle , on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Soit t un réel strictement positif , alors par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique réel x tel que $e^x = t$. On pose alors $ln(t) = x$
On sait que $e^0 = 1$ donc par la construction précédente , $ln1 = 0$

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

> **A retenir**
> 1. La fonction $f(x) = lnx$ est continue sur $]0; +\infty[$
> 2. La fonction $f(x) = lnx$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
> 3. $a \leq b \iff lna \leq lnb$

Le principe

On utilise simplement les définitions

Les démonstrations

1. La fonction $f(x) = lnx$ est dérivable donc continue .
2. $f'(x) =$ ....

3. Par définition d'une fonction strictement croissante .

3 Formules de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. $ln(ab) = lna + lnb$
2. $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$
3. $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -lnb$
4. $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}lna$
5. $ln(a^n) = nlna$ avec n entier naturel non nul .

Le principe

On va utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour la première puis utiliser cette formule pour démontrer les autres .

Les démonstrations

1. On pose : $X = lna$ et $Y = lnb$. Alors : e^{X+Y} =... .... En utilisant le fait que les fonctions sont réciproques : $X+Y$ = ...
2. $ln\left(\frac{a}{b} \times b\right)$ = ...
3. $ln\left(\frac{1}{b}\right)$ = ...
4. $ln(\sqrt{a}\sqrt{a})$ = ...
5. Par récurrence : l'initialisation est immédiate pour n = 1 .
   Hérédité : ....

....
....
....
....
....
....

4 Limites de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$

Le principe

On utilise les formules de limites de la fonction exponentielle pour la première puis on en déduit la deuxième . La troisième découle du nombre dérivé .

Les démonstrations

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{lnx} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
   car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty \iff \lim\limits_{t \to +\infty} t = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -lnx =$ ....
   ....
   .... Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$..
   ....
3. On pose $f(x) = ln(x+1)$ alors $f'(x) =$ .... et par la définition du nombre dérivé : ....
   ....
   ....
   ....
   ....