Démonstration probabilités

Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants , alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants

Le principe

On utilise la définition des événements indépendants

On utilise la formule de $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

La démonstration

Utilisation de la définition

Soient A et B deux événements indépendants .

Alors : $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

Utilisation des formules

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \text{ donc}$$

$p(A) = 1 - p(\overline{A})$

La formule des probabilités totales donne :

$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$ donc $p(A \cap B) = p(B) - p(\overline{A} \cap B)$

On a donc :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \Leftrightarrow p(B) - p(\overline{A} \cap B) = (1 - p(\overline{A}))p(B)$$

$\Leftrightarrow p(B) - p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(B)p(\overline{A}) \Leftrightarrow -p(\overline{A} \cap B) = -p(B)p(\overline{A})$

Donc : $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A})p(B)$

Conclusion

Les événements $\overline{A}$ et B sont donc indépendants par la définition

Variante

Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants , alors les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Le principe

On utilise la propriété précédente

Si B et $\overline{A}$ sont indépendants , alors par la propriété précédente $\overline{B}$ et $\overline{A}$ indépendants

La démonstration

Soient A et B deux événements indépendants

Alors par la propriété précédente , B et $\overline{A}$ indépendants

On applique alors la propriété à ces deux événements B et $\overline{A}$

On a donc $\overline{B}$ et $\overline{A}$ indépendants