Démonstrations distances

Propriété

Soit D une droite du plan d'équation cartésienne $ax+by+c=0$

Soit E $(x_E;y_E)$ un point du plan

Alors la distance de E à D est donnée par la formule : $\dfrac{|ax_E+by_E+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Démonstration

Le principe

On cherche la distance du point à la droite en utilisant le projeté orthogonal

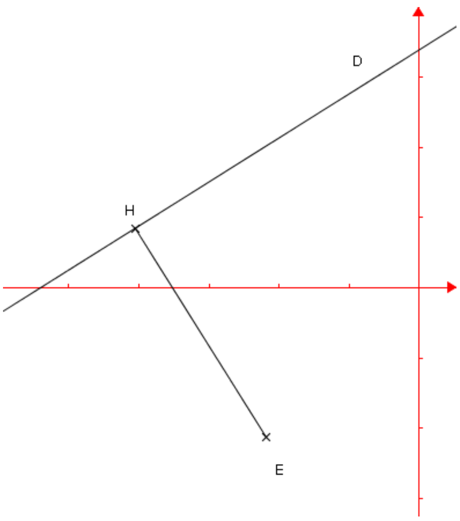
Pour retenir cette démonstration

Faire un schéma et la traiter comme un exercice

Les pré requis

Définition du projeté orthogonal

La démonstration



Soit D une droite du plan d'équation cartésienne $ax+by+c=0$

Son vecteur normal est $\vec{n}(a;b)$

Soit E $(x_E;y_E)$ un point du plan

On appelle H $(x_H;y_H)$ le projeté orthogonal de E sur D .

Alors (HE) et D sont orthogonales donc $\overrightarrow{HE}=k\vec{n}$

On peut donc écrire : $\begin{cases} x_E-x_H=ka \\ y_E-y_H=kb \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_H=x_E-ka \\ y_H=y_E-kb \end{cases}$

De plus H est sur D donc $ax_H+by_H+c=0$

Ce qui donne :

$a(x_E-ka)+b(y_E-kb)+c=0$

Déterminons k :

$ax_E+by_E+c=k(a^2+b^2)$ donc $k=\dfrac{ax_E+by_E+c}{a^2+b^2}$

La distance entre E et D est donc la longueur EH . Calculons la

$$EH=\left\|\overrightarrow{EH}\right\|=\sqrt{(x_E-x_H)^2+(y_E-y_H)^2}=\sqrt{k^2a^2+k^2b^2}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_E+by_E+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(ax_E+by_E+c)^2}{(a^2+b^2)}}=\frac{|ax_E+by_E+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstrations distances

Propriété

Soit P un plan de l'espace d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$

Soit E $(x_E;y_E;z_E)$ un point de l'espace

Alors la distance de E à P est donnée par la formule : $\dfrac{|ax_E+by_E+cz_E+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Démonstration

Le principe

On cherche la distance du point à la droite en utilisant le projeté orthogonal

Pour retenir cette démonstration

Bien retenir la précédente , c'est la même avec une dimension de plus

Les pré requis

Définition du projeté orthogonal

La démonstration

Soit P un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$

Son vecteur normal est $\vec{n}(a;b;c)$

Soit E $(x_E;y_E;z_E)$ un point de l'espace

On appelle H $(x_H;y_H;z_H)$ le projeté orthogonal de E sur P

Alors (HE) et P sont orthogonaux donc $\overrightarrow{HE}=k\vec{n}$

On peut donc écrire : $\begin{cases} x_E-x_H=ka \\ y_E-y_H=kb \\ z_E-z_H=kc \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_H=x_E-ka \\ y_H=y_E-kb \\ z_H=z_E-kc \end{cases}$

De plus H est sur P donc $ax_H+by_H+cz_H+d=0$

Ce qui donne :

$a(x_E-ka)+b(y_E-kb)+c(z_E-kc)+=0$

Déterminons k :

$ax_E+by_E+cz_E+d=k(a^2+b^2+c^2)$ donc $k=\dfrac{ax_E+by_E+cz_E+d}{a^2+b^2+c^2}$

La distance entre E et D est donc la longueur EH . Calculons la

$EH=\left\|\overrightarrow{EH}\right\|=\sqrt{(x_E-x_H)^2+(y_E-y_H)^2+(z_E-z_H)^2}=\sqrt{k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2}$

$=\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)(ax_E+by_E+cz_E+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}=\sqrt{\dfrac{(ax_E+by_E+cz_E+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)}}=\dfrac{|ax_E+by_E+cz_E+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$