Démonstration « si f dérivable alors f continue »

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si f est dérivable en a alors f est continue en a , pour tout a de I .

Démonstration

Le principe
De la formule du nombre dérivé , on écrit la définition de la fonction continue .
Pour retenir cette démonstration
Partir du nombre dérivé
Les pré requis
La définition d'une fonction dérivable
La définition d'une fonction continue

La démonstration
Soit f une fonction dérivable en a

- *Définition de la dérivabilité*

Alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

- *Utilisation d'une fonction auxiliaire dont on cherche la limite de deux façons différentes*

Posons g(x) = $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$

- *Limite membre à membre*

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} f(a)-\lim\limits_{x\to a} f'(a)(x-a)$

Or $\lim\limits_{x\to a} x-a=0$ donc $\lim\limits_{x\to a} f'(a)(x-a)=0$

$\lim\limits_{x\to a} f(a)=f(a)$ puisque f(a) ne dépend pas de x

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-f(a)}$

- *Limite grâce au nombre dérivé de f*

De plus , puisque $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to a} g(x)=0}$

- *Bilan des deux limites*

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)-f(a)=0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Et donc f est continue en a .