Démonstrations équations cartésiennes et représentations paramétriques

Propriété

Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$
Réciproquement , si un plan a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors ce plan admet pour vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstration

Le principe

On démontre d'abord un sens puis l'autre ; on utilise les propriétés du vecteur normal à un plan

Pour retenir cette démonstration

La traiter comme un exercice

Les pré requis

La définition d'un vecteur normal

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan .

La démonstration

Déterminons l'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal (a ;b ;c)

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ passant par A $(x_A;y_A;z_A)$

Soit M(x ;y ;z) un point de P .

Alors $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ donc $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ donc $ax+by+cz+d=0$

En posant : d = $-ax_A-by_A-cz_A$

Déterminons un vecteur normal d'un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$

Soit P un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$

Alors les point A$\left(0;0;-\frac{d}{c}\right)$, B$\left(0;-\frac{d}{b};0\right)$et C$\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ sont des points de P .

Soit $\vec{n}$ un vecteur , alors $\vec{n}$ est normal à P si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P .

On doit donc avoir : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}x_n(0)+y_n\left(-\frac{d}{b}\right)+z_n\left(\frac{d}{c}\right)=0\\ x_n\left(-\frac{d}{a}\right)+y_n(0)+z_n\left(\frac{d}{c}\right)=0\end{cases}$

On a donc : $\begin{cases}y_n=z_n\left(\frac{b}{c}\right)\\ x_n=z_n\left(\frac{a}{c}\right)\end{cases}$

On pose $z_n=c$ et on obtient $x_n=a$ et $y_n=b$

Et donc $\vec{n}(a;b;c)$

Démonstrations équations cartésiennes et représentations paramétriques

Propriété

Un point M(x ;y ;z) appartient à la droite D de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ et qui passe par le point A$\left(x_A;y_A;z_A\right)$ si et seulement si : $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ avec k réel .

Démonstration

M appartient à D si et seulement si $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases}$