Démonstration de la propriété fonctionnelle de la fonction exponentielle

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ non nulle .. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :
1) f(x+y)=f(x) f(y) pour tous x et y réels
2) f (x) = e^{ax} avec a réel .

Démonstration

Le principe
On va procéder par double implication . On va utiliser les dérivées pour montrer que l'assertion 1 entraine l'assertion 2 . Dans l'autre sens , ce sont les règles de calcul de la fonction exponentielle .
Pour retenir cette démonstration
Il y a deux temps . Dans le premier , on dérive par rapport à x la formule f(x+y) = f(x)f(y) et on utilise la définition de la fonction exponentielle . Dans le deuxième , on applique les règles des puissances
Les pré requis
$e^{u+v} = e^u e^v$
Les solutions de y' = ay sont de la forme y(x) = ke^{ax}
$e^0 = 1$
La démonstration

- *Montrons que 1 entraine 2*

Soit f (x) une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ non nulle qui vérifie : $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x et y .

- *Montrons que f'=af*

Puisque f est dérivable par rapport à x , f(x + y) aussi .
Alors $f'(x+y) = \left(f(x)f(y)\right)'$ donc $f'(x+y) = f(y)f'(x)$
On pose x = 0 , on obtient : $f'(y) = f'(0)f(y)$ pour tout y .
Soit a = f '(0) alors f '(y) = a f(y) pour tout y et donc $f(x) = ke^{ax}$ avec k réel .

- *Déterminons k*

Or $f(0+y) = f(0)f(y)$ donc $f(0)=1$ car f(y) non nul .
Donc $f(0) = ke^{a0} = k$ et k = 1
En conclusion : f(x) = e^{ax} .

- *Montrons que 2 entraine 1*

Soit f(x) = e^{ax}
$e^{u+v} = e^u e^v$ donc $e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax}e^{ay}$ donc $f(x+y) = f(x)f(y)$