Démonstrations limites simples de ln x

Propriété

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Démonstration

Le principe

On utilise la réciprocité de ln x et de e^x et la limite connue de e^x pour montrer la première .
La deuxième découle de la première

Pour retenir cette démonstration

Bien connaître la définition d'une fonction qui tend vers $+\infty$

Les pré requis

La fonction ln x est strictement croissante
Les fonctions ln x et e^x sont réciproques
Les formules de ln x

La démonstration

- *Montrons la première formule*
  - *Définition de* $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour x assez grand , f(x) appartient à tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$

On peut la traduire ainsi :

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si , pour n'importe quel réel A fixé , il existe m tel que pour x > m , f(x) > A .

Autrement dit , fixons A réel .
On cherche m tel que si x > m alors ln x > A .

- *Utilisation de l'exponentielle*

La fonction ln x est strictement croissante donc ln x > A équivaut à x > e^A .
On a donc si x > e^A , alors ln x > A
Ce qui est bien ce qu'on voulait avec m = e^A .
Donc $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- *Montrons la deuxième formule*

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ donc $\lim_{x \to 0} \ln x = \lim_{x \to 0}\left[-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\lim_{t \to +\infty} \ln t = -\infty$

Démonstrations limites simples de ln x

Propriété

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (comportement à l'origine)

Démonstration

Le principe

On utilise le nombre dérivé

Pour la retenir

Penser au nombre dérivé !

Les pré requis

La fonction ln u est dérivable et sa dérivée est u'/u

La démonstration

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - \ln 1}{x - 0} = \left(\ln(x+1)\right)'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$