Démonstration de la dérivabilité de ln x

Cette démonstration a deux variantes assez éloignées l'une de l'autre et assez techniques l'une et l'autre !

Propriété

La fonction ln x est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Démonstration 1

Le principe

On travaille en deux temps : dérivable en 1 puis dérivable pour tout réel strictement positif

Pour retenir cette démonstration

Elle est assez difficile donc pas de découragement surtout !

On peut s'aider d'un schéma pour visualiser car on utilise les propriétés géométriques des courbes de ln x et de e^x .

Les pré requis

La fonction exponentielle est dérivable , sa dérivée est elle-même

Les courbes des fonctions ln x et e^x sont symétriques par rapport à la première bissectrice .

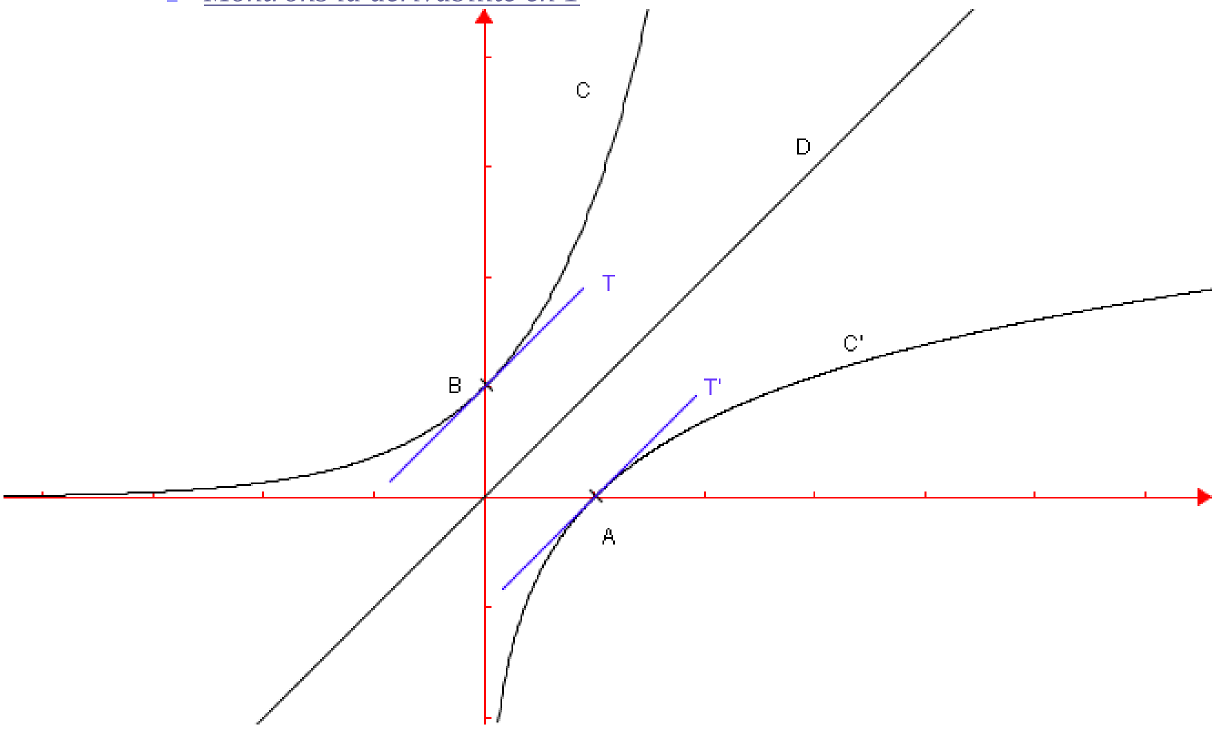
Les formules de calcul avec ln x

La démonstration

On note C la courbe de e^x et C' la courbe de ln x .

Soit D la première bissectrice

Montrons la dérivabilité en 1



Soit B(0 ;1) . Alors B est sur C .

Soit T la tangente à C en B .

Puisque la fonction exponentielle est dérivable sur R , le coefficient directeur de T est $e^0 = 1$.

Le coefficient directeur de D est aussi égal à 1

Donc T et D sont parallèles .

Démonstration de la dérivabilité de ln x

Par symétrie d'axe D , l'image de B est A(1 ;0) , l'image de C est C' et donc l'image de T est T' tangente à C' en A .
Puisque T et D sont parallèles , alors T' et T sont aussi parallèles . *l'image d'une droite parallèle à l'axe par une symétrie axiale est une droite parallèle .*
Le coefficient directeur de T' est donc 1 .

Or par définition , le coefficient directeur de T' est $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}$ donc $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=1$ et puisque 1 est fini , la fonction ln x est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est égal à 1 .

Montrons la dérivabilité en a réel strictement positif

On cherche $\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$

Or $\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}=\frac{1}{a}\frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}-1\right)}$

On vient de montrer que $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=1$, or ln 1 = 0 donc $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

De plus , si x tend vers a , alors $\frac{x}{a}$ tend vers 1 et on a donc $\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}-1}=1$

Donc $\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{1}{a}$ qui est un nombre fini .

Et la fonction ln x est donc dérivable pour tout x strictement positif et $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Démonstration de la dérivabilité de ln x

Propriété

La fonction ln x est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Démonstration 2

Le principe

On utilise la réciprocité de e^x et de ln x et on utilise le nombre dérivé de e^x pour trouver celui de ln x

Pour retenir cette démonstration

Elle est assez difficile , il faut être à l'aise avec les changements de variables .

Les pré requis

La fonction exponentielle est dérivable , sa dérivée est elle-même
Les fonctions e^x et ln x sont réciproques
La fonction ln x est continue sur $]0;+\infty[$

La démonstration

Soit a un réel strictement positif

On cherche $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a}$

On fait apparaître une limite avec des exponentielles

Or $x = e^{\ln x}$ et $a = e^{\ln a}$ donc on peut poser y = ln x et b = ln a
Puisque la fonction ln x est continue si x > 0 , alors $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a$

Et la limite cherchée devient : $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{y - b}{e^y - e^b}$

On calcule la limite avec les propriétés de l'exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable donc $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{e^y - e^b}{y - b} = e^b$

On a donc $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{y - b}{e^y - e^b} = \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{1}{a}$

Donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim\limits_{y \to b} \dfrac{y - b}{e^y - e^b} = \dfrac{1}{a}$ et la fonction ln x est dérivable en a et son nombre dérivé en a est $\dfrac{1}{a}$.