Démonstration de ln et exp réciproques

Propriété

Soient x et y des réels tels que x > 0 . Alors $e^{\ln x} = x$ et $\ln e^{y} = y$

Démonstration

Le principe

On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires .

Pour retenir cette démonstration

Bien apprendre la définition de la fonction ln x

Les pré requis

La définition de la fonction ln x
Le CTVI
Les variations de la fonction exponentielle

La démonstration

Commençons par rappeler la définition de la fonction ln x

On sait que la fonction e^{x} est strictement croissante de R dans $]0;+\infty[$
De plus c'est une fonction dérivable donc continue .
Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , pour tout y de $]0;+\infty[$, il existe un unique x de R tel que $e^{x} = y$.
On définit la fonction logarithme népérien par ln y = x

Montrons maintenant la deuxième formule

Par ce qu'on vient de rappeler , ln y = x correspond à $\ln e^{x} = x$ puisque $e^{x} = y$.

Montrons maintenant la première formule

Puisque $e^{x} = y$ et ln y = x avec y dans $]0;+\infty[$, on a $e^{\ln y} = y$ avec y > 0 .

Propriété

Les courbes de la fonction ln x et de la fonction e^{x} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation y = x)

Démonstration

Le principe

On prend un point sur la première courbe et on montre que son image par la symétrie d'axe la première bissectrice est un point situé sur la deuxième courbe

Pour retenir cette démonstration

Bien retenir le prologue ; se souvenir de la définition d'une courbe .

Les pré requis

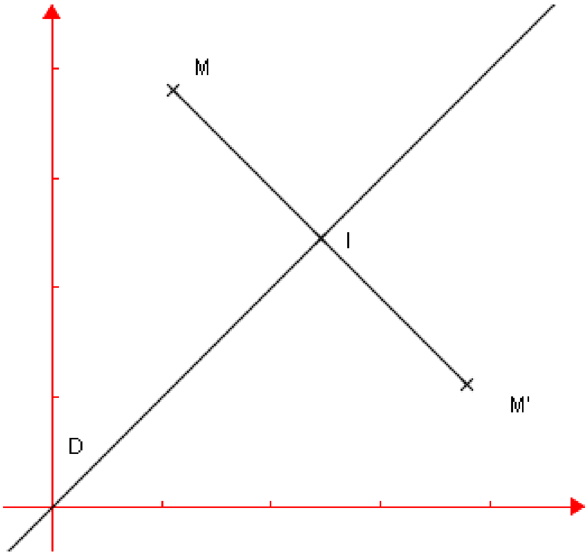
Les fonctions e^{x} et ln x sont réciproques (la propriété précédente)
La définition d'une symétrie axiale

La démonstration

Prologue :

On va montrer que l'image de M(x ;y) par la symétrie d'axe la première bissectrice est M'(y ;x)

Dans certaines variantes , ce prologue est un pré requis et on n'a donc pas besoin de le démontrer



Soit D la première bissectrice .
Soit M(x ;y) un point du plan et soit M'(x' ;y') son image par la symétrie d'axe D .
Par la définition de la symétrie , on sait que D est la médiatrice de [MM']
On note I le milieu de [MM'] .
Alors : I est sur D et D est perpendiculaire à (MM')

On utilise I est sur D

I est sur D donc : $x_I = y_I$

Mais I est le milieu de [MM'] donc $x_I = \dfrac{x+x'}{2}$ et $y_I = \dfrac{y+y'}{2}$

D'où : $\dfrac{x+x'}{2} = \dfrac{y+y'}{2}$ et donc : x + x' = y + y'

On a donc : $\boxed{x' - y' = y - x}$.

On utilise D perpendiculaire à (MM')

D est perpendiculaire à (MM')
Or D a pour équation y = x qu'on peut aussi écrire x – y = 0 . Son vecteur directeur est donc $\vec{u}(1;1)$

Et $\overrightarrow{MM'}(x'-x; y'-y)$

Or $\vec{u} \perp \overrightarrow{MM'}$ donc $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ ce qui donne : $1(x'-x) + 1(y'-y) = 0$

D'où : x' – x + y' – y = 0
On a donc : $\boxed{x' + y' = x + y}$

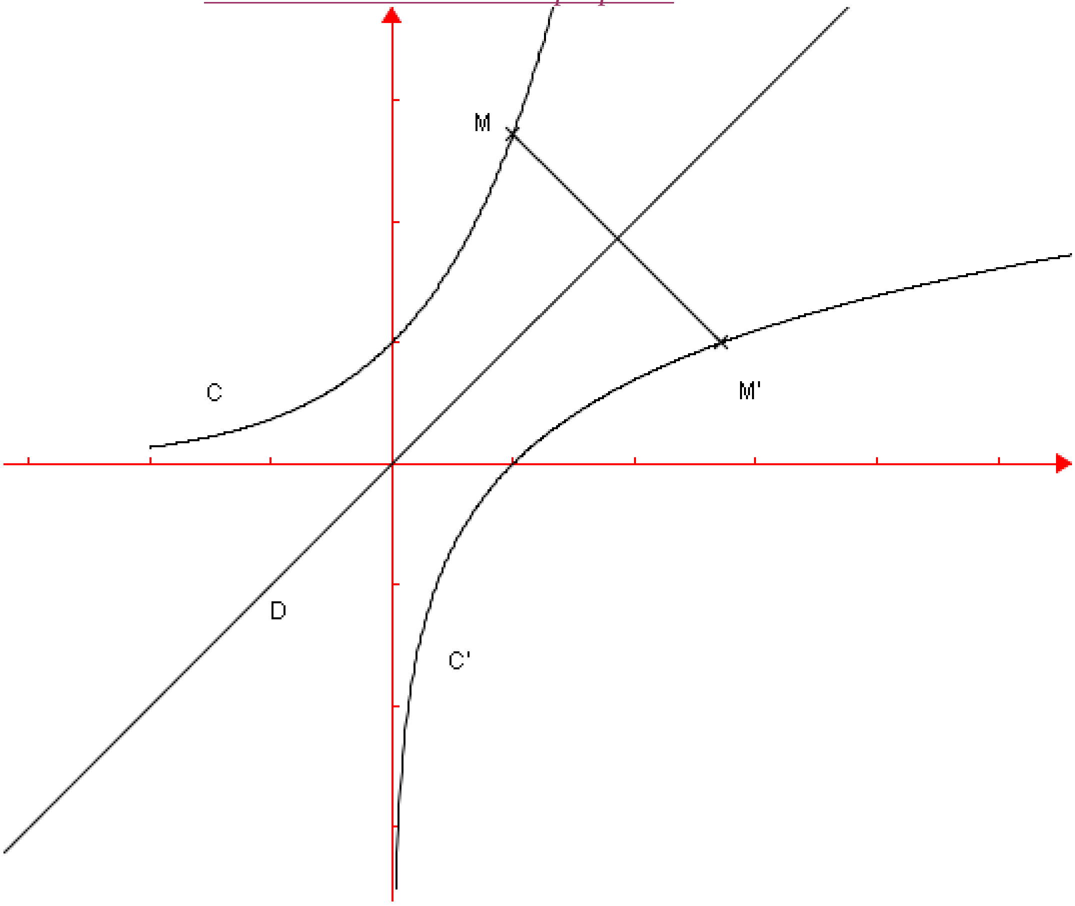
On reprend ces deux équations et on détermine x' et y'

$\begin{cases} x'-y' = y-x \\ x'+y' = x+y \end{cases}$ on additionne les deux lignes et ensuite on les soustrait ; on obtient :

$\begin{cases} 2x' = 2y \\ -2y' = -2x \end{cases}$ soit $\begin{cases} x' = y \\ y' = y \end{cases}$

Donc l'image de M(x ;y) par la symétrie d'axe D est M'(y ;x)

Démontrons maintenant la propriété



On appelle C la courbe de la fonction e^x et on appelle C’ la courbe de la fonction ln x .
Soit M un point de C
Alors M(x ; e^x) *rappel : M est sur la courbe de la fonction f si et seulement si M(x ;f(x))*
Soit D la première bissectrice
Alors par le prologue , le point M’ image de M par la symétrie d’axe D est tel que M’(e^x ; x)
Or par la propriété du début , ln e^x = x donc M’(e^x ; ln e^x) et M’ est sur C’ .