Continuité d'une fonction

Sur un intervalle

Pour démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle, il suffit de dire qu'elle est composée de fonctions continues sur cet intervalle.
Les fonctions continues connues :

Les polynômes, les fonctions sinus et cosinus et la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$
Les fonctions rationnelles, racines, tangente et logarithme sur leur ensemble de définition complet

- Si dans un énoncé on demande de montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle, il y a juste une phrase à faire

De plus, toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

Exemple

Montrer que f(x) = (x² + 3x) $\sqrt{x+8}$ est continue sur $[-8;+\infty[$.
La fonction f est le produit d'un polynôme (x² + 3x) continu sur $\mathbb{R}$ et d'une racine continue sur $[-8;+\infty[$ donc elle est continue sur $[-8;+\infty[$.

En un point

Il faut toujours utiliser la même méthode qui consiste à connaître la formule et à la mettre en application :

Une fonction est continue en un point a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exemple

Soit la fonction f définie par f(0) = 0 et f(x) = $x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour x $\neq 0$. Démontrer que f est continue en 0 .

- On commence par déterminer la limite de $x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 :

On sait que $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, puisque x² ≥ 0 on a alors l'encadrement :

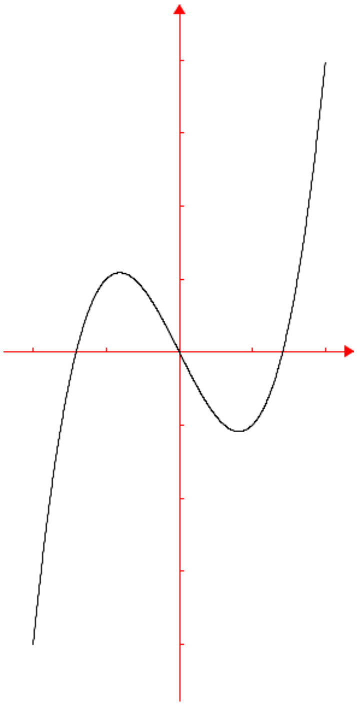
$-x^2 \leq x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$, or $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ donc par le théorème des gendarmes , $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

- Ensuite on compare avec f(0) . Or f(0) = 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = f(0)$
- On conclut que f est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

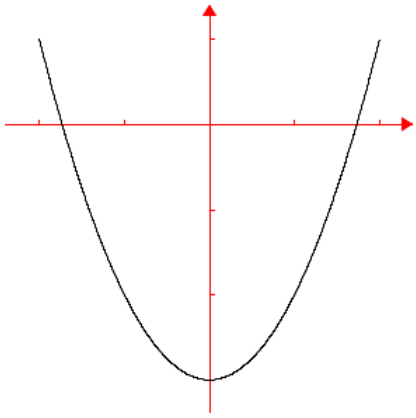
Principe

Sur le graphique ci-contre , la courbe représentative de la fonction donnée coupe l’axe des abscisses en un seul point A . Or la forme de cette courbe donne f croissante sur [1 ;2] , f est continue (car il n’y a pas de coupure) et 0 est bien l’ordonnée d’un point de la courbe (A) placé entre les abscisses 1 et 2



C’est le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qui dit que lorsque ces trois conditions sont réunies alors , on est certain que le point A est unique .

Le deuxième graphique montre que la condition croissante est indispensable car sur [-2 ;2] la courbe coupe l’axe des abscisses en deux points et sur cet intervalle la courbe est décroissante puis croissante



Dans les exercices , on utilise les tableaux de variations au lieu de la courbe mais le raisonnement est identique .

Raisonnements de bases

Pour chaque tableau de variations suivant , dire si l’équation f(x) = 0 a une solution . Sinon , expliquer pourquoi . Si oui , donner l’intervalle sur lequel se situe la solution (on peut très rapidement donner l’allure de la courbe pour mieux visualiser la situation)

x	2	5	7
f(x)	- 1	- 6	- 2

Le maximum de la fonction étant – 1 , elle ne peut pas s’annuler donc pas de solution à f(x) = 0

x	2	5	7
f(x)	3	- 6	- 2

Quand x est dans [2 ;5] , f(x) passe de 3 à – 6 donc f s’annule une fois . Quand x est dans [5 ;7] , f admet pour maximum – 2 donc reste négative et ne s’annule pas . Donc il y a une seule solution de f(x) = 0 dans [2 ;7]

Rédaction du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Il faut bien faire apparaître les trois arguments indispensables (continuité , croissance ou décroissance et 0 dans l'intervalle image)

Exemple

Soit la fonction f définie par f(x) = $\frac{x^3}{x+1}$ sur $[-5;-1[$. Montrer que l'équation f(x) = 35 a une seule solution sur $[-5;-1[$.

Après étude de la dérivée on obtient le tableau de variations suivant (bon exercice à refaire)

x	- 5	$-\frac{3}{2}$	- 1
f(x)	31,3 ↘	6,75	↗ $+\infty$

- f est une fonction continue sur son ensemble de définition $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ car c'est un quotient de deux polynômes , x^3 continue sur $\mathbb{R}$ et x + 1 continu sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $[-5;-1[$ qui est une restriction de son domaine de définition .
- sur $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$, f est une fonction strictement croissante
- si x est dans $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$, alors f(x) est dans $[6{,}75;+\infty[$ et 35 appartient bien à cet intervalle
- par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ tel que f(a) = 35
- remarquons de plus que si x appartient à $\left[-5;-\frac{3}{2}\right]$, le maximum de f est 31,3 donc f(x) < 35 . Il n'y a pas de solution à f(x) = 0 dans $\left[-5;-\frac{3}{2}\right]$
- conclusion : f(x) = 35 admet une unique solution sur $[-5;-1[$

Dans un énoncé , une question de la forme « montrer que l'équation f(x) = k a une unique solution » se traite toujours à l'aide de cette méthode .

Continuité d'une fonction

Valeur approchée de la solution f(x) = k

Principe : on entre dans la calculatrice la fonction , on définit les paramètres du tableur avec l'intervalle dans lequel est contenue la solution de l'équation et on choisit le pas . On regarde dans le tableur les deux valeurs de y qui encadrent k et on en déduit un encadrement en lisant les x . On retourne dans les paramètres du tableur pour affiner jusqu'à obtenir la précision demandée par l'énoncé

Exemple

Soit la fonction f définie par f(x) = $x^3 - 6x^2 + 6$. On a montré que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans [0 ;4] . Déterminer un encadrement à 0, 001 près de cette solution .

Appelons a cette solution .

On entre dans la calculatrice (touche Y= ou f(x) =) la fonction : $x^3 - 6x^2 + 6$

On définit les paramètres du tableur (tableset ou déftable) : début : 0 , pas : 1

On va lire le tableur , on a cet affichage :

x	y
0	6
1	1
2	-10

On voit que y passe de 1 à – 10 si x passe de 1 à 2 donc 1 < a < 2

On va donc retourner dans les paramètres du tableur : début 1 , pas : 0,1

On regarde de nouveau le tableur :

x	y
1	1
1,1	0,07
1,2	- 0, 91

Cette fois-ci , on conclut que

1,1 < a < 1,2

Puisque l'énoncé demande trois chiffres après la virgule , on recommence les étapes précédentes encore deux fois et on obtient les deux tableurs suivants avec leurs conclusions réciproques :

Début : 1, 1 , pas : 0 , 01

x	y
1,1	0,071
1,11	- 0, 02497

1,1 < a < 1,11

début 1,1 , pas : 0, 001

x	y
1,1	0,07000
1,101	0,06140
1,102	0,05184
1,103	0,04226
1,104	0,03267
1,105	0,02308
1,106	0,01348
1,107	0,00387
1,108	- 0,00570

1, 107 < a < 1,108

On commence toujours par le pas 1 et on affine au fur et à mesure car ainsi on gagne du temps : si on prenait directement le pas donné par l'énoncé , il y aurait trop de valeurs à étudier .

Essayez si vous ne me croyez pas !

Continuité d'une fonction

Exercices

Exercice 1

Soit f(x) = x^2-1 définie sur [-2 ; 2] . Montrer que f(x) = 0 admet une seule solution dans l'intervalle [-2 ;0]

Exercice 2 (un grand classique et une base indispensable à votre formation)

Soit f(x) = $-4x^3+6x^2-6x+2$

1) Etudier les variations de f et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 et donner une valeur approchée de ces solutions .
3) En déduire le signe de f
4) Soit g(x) = $-x^4+2x^3-3x^2+2x$. Déterminer les variations et les limites de g .

Exercice 3

1) Soit la fonction f(x) = $2x+\sqrt{x+3}$. Montrer que f est continue sur $[-3;+\infty[$
2) Soit la fonction g(x) = $\dfrac{\sqrt{x}}{2x-1}$. Montrer que g est continue sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right[$

Exercice 4

Soit f(x) = x^3-4x+5 . Montrer que l'équation f(x) = 8 admet une unique solution sur $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3};3\right]$ et en donner un encadrement à 0,1 près .

Exercice 5

Soit f(x) = $2x^3-3x^2-1$. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution et en donner un encadrement à 10^{-2} près .En déduire le signe de f

Exercice 6

Soit la fonction f définie par f(x) = $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si x $\neq 0$ et f(0) = 0 . Montrer que f est continue en 0 .

Exercice 7

Soit la fonction f(x) = $|x|$. Etudier la continuité de f en 0 .

Exercice 8

1) Soit la fonction f définie par f(x) = x² si x $\geq$ 0 et f(x) = x – 1 si x < 0 . Etudier la continuité de f en 0 .
2) Soit la fonction f définie par f(x) = x² si x ≥ 0 et f(x) = x si x < 0 . Etudier la continuité de f en 0 .
3) Soit la fonction f définie par f(x) = x² si x $\geq$ 0 et f(x) = - x² si x < 0 . Etudier la continuité de f en 0 .