Corrigé dérivabilité

Exercice 1

1) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Or les fonctions trigonométriques n'ont pas de limite à l'infini donc f n'est pas dérivable en 0

2) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|}{x} = -1$ si x < 0 et $\dfrac{|x|}{x} = 1$ si x > 0. La limite à droite étant différente de la limite à gauche, f n'est pas dérivable en 0

3) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2}{x} = x$ si x ≤ 0.

Et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x-1}{x} = 1-\dfrac{1}{x}$ si x > 0.

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0} 1-\dfrac{1}{x} = -\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

4) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2}{x} = x$ si x ≤ 0 et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x}{x} = 1$ si x > 0, on a

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ donc la fonction n'est pas dérivable en 0

5) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2}{x} = x$ si x ≤ 0 et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{x^2}{x} = -x$ si x > 0, on a

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$ donc la fonction est dérivable en 0

Exercice 2

1) Vrai : La fonction f est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ donc en 1
2) Faux : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty$; les limites sont différentes .
3) Vrai : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x-5}{5x-4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{x\left(5-\frac{4}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4-\frac{5}{x}}{5-\frac{4}{x}} = \dfrac{4}{5}$
4) Faux : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{x} = 0$
5) Vrai : th de majoration
6) Faux : u(x) = x^2 et v(x) = 1 . v(x) – u(x) = (1 – x) (1 + x) < 0 sur] 1 ; $+\infty$ [
7) Faux : $\dfrac{-1}{x^2+1} \leq \dfrac{\cos x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ donc par le théorème des gendarmes , $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$
8) Vrai : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2+1} = \dfrac{\cos 0}{0^2+1} = 1$
9) Vrai : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = 2$,

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = +\infty$.

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation y = 2 et deux asymptotes verticales d'équation x = 1 et x = - 1

10) Faux : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$, la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ donc pas d'autres limites aux bornes du domaine de définition . Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{1}{2}$

11) Vrai

12) Faux : la dérivée de $\cos^2 x$ est 2 (- sin x) (cos x)

13) Faux : La dérivée de $\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$ est $-\dfrac{\frac{2}{2\sqrt{2x+4}}}{\left(\sqrt{2x+4}\right)^2} = -\dfrac{1}{(2x+4)\sqrt{2x+4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x+4)^3}}$

(formule dérivée de 1/u est – u' / u²)

14) Faux : 1 + $\tan^2$ x

15) Vrai : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x-0} = (\cos)'(0) = -\sin 0 = 0$ (nombre dérivé)

16) Vrai : Dérivons déjà une fois (x² - 4) (2x – 3) :
2x (2x – 3) + (x² - 4) (2) = 6 x² - 6x – 8 .
Dérivons une nouvelle fois : 12 x – 6 = 6 (2x – 1)

17) Vrai : La formule de la tangente est y = f '(1) (x – 1) + f(1) . Or f(x) = x^3 + x + 1 donc f '(x) = 3x² + 1 d'où l'équation : y = 4 (x – 1) + 3 c'est-à-dire : y = 4 x – 1

18) Faux : La fonction f(x) = $x\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$.

Etudions ce qui se passe en 1 : $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 1.