Corrigé continuité

Exercice 1

f(x) = x² - 1 . f '(x) = 2x . D'où le tableau de variations sur la restriction [-2 ; 0] .

x	-2		0
f(x)	3		
		↘	
			- 1

f est continue car c'est un polynôme .
f est strictement décroissante sur [-2 ;0]
0 est dans l'intervalle image [-1 ;3] de [-2 ;0]
Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe une unique solution dans [-2 ;0] de l'équation f(x) = 0

Exercice 2

f(x) = $-4x^3+6x^2-6x+2$

1) f '(x) = - 12 x² + 12x – 6 = - 6 (x² - 2x + 1) = -6 (x – 1)² < 0 .
   Donc la fonction f est décroissante .
   $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} 6x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} -6x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   $-4x^3+6x^2-6x+2 = -4x^3\left(1-\dfrac{3}{2x}+\dfrac{3}{2x^2}-\dfrac{1}{2x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{3}{2x}+\dfrac{3}{2x^2}-\dfrac{1}{2x^3}=1$ donc
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$		
		↘	
			$-\infty$

La fonction f est continue car polynôme , strictement décroissante et 0 appartient bien à l'intervalle image donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution a telle que a réel et f(a) = 0 .
Avec la calculatrice , on trouve : a = 0,5 .

3) Par lecture du tableau de variations , on a : f(x) $\geq$ 0 sur $]-\infty;a]$ et f(x) ≤ 0 sur $[a;+\infty[$
4) g(x) = $-x^4+2x^3-3x^2+2x$, g'(x) = $-4x^3+6x^2-6x+2$. Donc g' est du signe de f et on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g(x)			g(a)		
		↗		↘	
	$-\infty$				$+\infty$

$$-x^4+2x^3-3x^2+2x = -x^4\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) \text{ et } \lim_{x\to\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}=1 \text{ , } \lim_{x\to\infty} -x^4 = -\infty$$

donc on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Exercice 3

1) la fonction f est la somme d'un polynôme continu sur $\mathbb{R}$ et d'une racine continue sur son ensemble de définition $[-3;+\infty[$ donc f est continue sur $[-3;+\infty[$
2) g est le quotient d'une racine définie sur son ensemble de définition et d'un polynôme ; elle est donc continue sur son ensemble de définition et donc sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ qui est une restriction de Df

Exercice 4

Soit f(x) = x^3-4x+5 alors f '(x) = 3x² - 4 = $(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$. D'où le tableau de variations suivant :

x	-2		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		3
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	5	↗	8,1	↘	1,92	↗	20

f est continue car polynôme , de plus sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3};3\right]$ f est strictement croissante et 8 appartient bien à [1,92 ; 20] donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution a dans $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3};3\right]$ telle que f(a) = 8

2,3 < a < 2,4

Exercice 5

Soit f(x) = $2x^3-3x^2-1$ alors f '(x) = 6x² - 6x = 6x (x – 1)
Calculons les limites :
Par calcul direct : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$2x^3-3x^2-1=x^3\left(2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=2 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	- 1	↘	- 2	↗	$+\infty$

Sur $]-\infty;1]$ f admet pour maximum – 1 donc ne s'annule pas
On sait que f est une fonction continue car c'est un polynôme , de plus sur $[1;+\infty[$ f est strictement croissante et 0 est bien dans $[-2;+\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution a dans $[1;+\infty[$ telle que f(a) = 0 et
1,67 < a < 1,68

Corrigé continuité

Exercice 6

Encadrons f(x) = $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$: - x < f(x) < x donc par le théorème des gendarmes

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0

Exercice 7

$\lim_{x\to 0}|x| = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f est continue en 0

Exercice 8

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ donc f n'est pas continue en 0
2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ donc f est continue en 0
3) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ donc f est continue en 0