Dérivabilité des fonctions

Définition de la dérivabilité

Sur un intervalle

Les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition **ouvert.**

- Si dans un énoncé, on demande de montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle, il y a juste une phrase à faire.

Exemple

Montrer que f(x) = (x² + 3x) $\sqrt{x+8}$ est dérivable sur $\left]-8;+\infty\right[$.

La fonction f est le produit d'un polynôme (x² + 3x) dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'une racine continue sur $\left]-8;+\infty\right[$ donc elle est dérivable sur $\left]-8;+\infty\right[$.

Attention : vous remarquerez la différence entre l'exemple de la continuité et celui-ci : l'intervalle d'étude est totalement ouvert !

En un point

Là encore, il n'y a qu'une chose à faire : connaître la formule et l'utiliser

Une fonction est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre fini

Exemple

Montrer que la fonction f(x) = $x^2\sqrt{x}$ est dérivable en 0

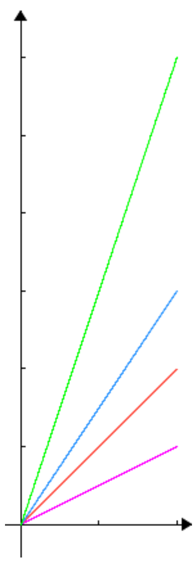
- On commence par calculer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ puis on étudie sa limite en 0 :

  $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{x}=x\sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{x}=0$
- Ensuite on regarde si la limite trouvée est un nombre fini : 0 est bien un nombre fini.
- On conclut : f est dérivable en 0 et f '(0) = 0

Dérivabilité et conséquence graphique

Lorsqu'une fonction est dérivable en a, f '(a) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a. En particulier, si f '(a) = 0, la tangente est horizontale.

Lorsqu'une fonction n'est pas dérivable en a et que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$, la courbe de f admet au point d'abscisse a une tangente verticale .



Visualisons pourquoi la tangente est verticale dans ce cas

On sait que le coefficient directeur correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la droite .

Sur le graphique suivant , on a tracé des droites de coefficient directeur de plus en plus grand , on s'aperçoit que ces droites s'approchent de la verticale , donc un coefficient directeur infini conduit à une droite verticale .

La droite rose a pour coefficient : 0,5

La droite rouge : 1

La droite bleue :1,5

La droite verte : 3

Exemple 1

Soit f(x) = $\sqrt{x^2+1}$. Etudier la dérivabilité de f en 0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}+1=2 \text{ donc } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

La fonction f est donc dérivable en 0 et f ’(0) = 0

Donc la courbe de f admet au point d’abscisse 0 une tangente horizontale

Exemple 2

Soit f(x) = $\sqrt{x+1}$. Etudier la dérivabilité de f en – 1

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+1}} \text{ et } \lim_{x\to -1}\sqrt{x+1}=0^+ \text{ donc } \lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=+\infty$$

La fonction f n’est pas dérivable en – 1

La courbe de f admet une tangente verticale au point d’abscisse – 1 .

Exemple 3

Soit f(x) = $|x-1|$. Etudier la dérivabilité en 1

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{|x-1|}{x-1}=1 \text{ si x > 1 et } \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{|x-1|}{x-1}=-1 \text{ si x < 1 .}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$.

La fonction f n’est pas dérivable en 1 car les limites à gauche et à droite sont différentes

La courbe admet deux demi-tangentes .

Exercices

Exercice 1

1) Soit la fonction f définie par f(x) = $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si x $\neq 0$ et f(0) = 0 . Etudier la dérivabilité de f en 0 .

2) Soit la fonction f(x) = $|x|$. Etudier la dérivabilité de f en 0

3) Soit la fonction f définie par f(x) = x^2 si x $\geq$ 0 et f(x) = x – 1 si x < 0 . Etudier la dérivabilité de f en 0 .

4) Soit la fonction f définie par f(x) = x^2 si x $\geq$0 et f(x) = x si x < 0 . Etudier la dérivabilité de f en 0 .

5) Soit la fonction f définie par f(x) = x^2 si x $\geq$ 0 et f(x) = - x^2 si x < 0 . Etudier la dérivabilité de f en 0 .

Exercice 2

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1) La fonction f définie par f(x) = $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ est continue en 1
2) La fonction f définie par f(x) = $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ est continue en 1
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-5}{5x-4} = \dfrac{4}{5}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2} = +\infty$
5) Si $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$ et u < v alors $\lim\limits_{+\infty} v = +\infty$
6) Si $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$ et v < u alors $\lim\limits_{+\infty} v = +\infty$
7) La fonction g(x) = $\dfrac{\cos x}{x^2+1}$ n'a pas de limite en $+\infty$
8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2+1} = 1$
9) La courbe de la fonction f(x) = $\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ admet trois asymptotes
10) La courbe de la fonction f(x) = $\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$ admet trois asymptotes
11) La dérivée de $\cos(x^2)$ est $-2x\sin(x^2)$
12) La dérivée de $\cos^2 x$ est $-2x\sin(x^2)$
13) La dérivée de $\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+4)^3}}$
14) La dérivée de tan x est $\tan^2 x - 1$
15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
16) La dérivée seconde de $(x^2 - 4)(2x - 3)$ est $6(2x - 1)$
17) La tangente au point d'abscisse 1 à la courbe de la fonction $f(x) = x^3 + x + 1$ a pour équation $y = 4x - 1$
18) La fonction f(x) = $x\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $[1;+\infty[$