Les indispensables en géométrie dans l'espace

Les formules et les propriétés incontournables

Orthogonalité

- Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul
- Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan
- Une droite orthogonale à un plan est alors orthogonale à n'importe quelle droite de ce plan.

Parallélisme

- Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles
- Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite du plan

Distances (hors programme mais utile pour ceux qui poursuivent en scientifique)

- Soit P un plan de l'espace d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ .Soit E $(x_E;y_E;z_E)$ un point de l'espace. Alors la distance de E à P est donnée par la formule : $\dfrac{|ax_E+by_E+cz_E+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
- On n'a pas de formule pour calculer dans l'espace la distance d'un point à une droite !

Equations

- Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$
- Un point M(x ;y ;z) appartient à la droite D de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ et qui passe par le point A $(x_A;y_A;z_A)$ si et seulement si : $\begin{cases} x=x_A+ka \\ y=y_A+kb \\ z=z_A+kc \end{cases}$ avec k réel.
- Il n'y a pas d'équation cartésienne de droite dans l'espace !
- L'équation cartésienne d'une sphère de centre A er de rayon R est : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

Lieux géométriques

- L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $MA=MB$ est le plan médiateur de [AB]
- L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre [AB]

Volumes

- D'un cylindre : base multipliée par hauteur
- D'un tétraèdre : $\frac{1}{3}\times airebase\ \times hauteur$
- D'une sphère : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Les indispensables en géométrie dans l'espace

Pense bête

Equation cartésienne d'un plan

Déterminer le vecteur normal : on a ainsi les coefficients de x , y et z . Pour trouver d , on remplace x , y et z par les coordonnées d'un point du plan .
Rappel : tous les vecteurs normaux ont des coordonnées proportionnelles !

Représentation paramétrique d'une droite

On applique la formule sans se poser de questions !

Intersection d'un plan et d'une droite

On remplace les x , y et z de l'équation cartésienne du plan par les x , y et z de la représentation paramétrique de la droite . On en déduite k , puis on remplace k dans le représentation paramétrique de la droite .

Intersection de deux plans

On utilise Gauss pour exprimer deux variables en fonction de la troisième . On a ainsi une représentation paramétrique de droite .

Intersection de trois plans

Pivot de Gauss

Analyser un énoncé

Repérer les unités
S'il y a une figure , ne pas oublier que la représentation de solides cache souvent des angles droits
Bien penser aux angles droits dans les calculs (aire , Pythagore , trigo …)
Dans les distances , faire bien attention si on demande distance d'un point à un plan (formule !) ou d'un point à une droite (pas de formule !)
Penser à utiliser les questions précédentes

Les indispensables en géométrie dans l'espace

Exemple

Lire cet énoncé avec un crayon et noter ce qui doit être remarqué et ce qui vient déjà à l'esprit pour aider à la résolution de l'exercice

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k}\right)$.

Soient les points A(-1 ; 2 ; 1) ; B(1 ; -6 ; -1) ; C(2 ; 2 ; 4) et I(0 ; 1 ; -1)

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
2) Montrer que le triangle ABC est rectangle . Soit D(-3 ; 1 ; 3) . Montrer que (DA) est orthogonale au plan (ABC) . En déduire le volume du tétraèdre ABCD .
3) Soit Q le plan d'équation : x + y – 3 z + 2 = 0 et soit Q' le plan contenant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ et le point O .
   a) Pourquoi les plans Q et Q' sont-ils sécants ?
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q'
   c) Donner la représentation paramétrique de la droite (D) intersection de Q et Q' . En déduire un vecteur directeur et un point de (D)
4) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2
5) On considère les points J(- 2 ; 0 ; 0) et K (1 ; 0 ; 1) .
   a) Déterminer une représentation paramétrique de (JK)
   b) Déterminer l'intersection de la sphère S et de la droite (JK)

Solution

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k}\right)$.

Soient les points A(-1 ; 2 ; 1) ; B(1 ; -6 ; -1) ; C(2 ; 2 ; 4) et I(0 ; 1 ; -1)

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) *vecteur normal et point A*
2) Montrer que le triangle ABC est rectangle . *angle droit avec produit scalaire* Soit D(-3 ; 1 ; 3) . Montrer que (DA) est orthogonale au plan (ABC) . *avec produit scalaire on montre que (DA) est orthogonale à 2 droites du plans* En déduire le volume du tétraèdre ABCD . *ABC rectangle donc base et hauteur les deux côtés de l'angle droit ; [DA] hauteur puisque orthog à (ABC)*
3) Soit Q le plan d'équation : x + y – 3 z + 2 = 0 et soit Q' le plan contenant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ et le point O .
   a. Pourquoi les plans Q et Q' sont-ils sécants ? *montrer leurs vecteurs normaux non colinéaires*
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan Q' *vecteur normal et point O*
   c. Donner la représentation paramétrique de la droite (D) intersection de Q et Q' . En déduire un vecteur directeur et un point de (D) *Gauss pour faire apparaître la représentation paramétrique de D .*
4) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2 *formule*
5) On considère les points J(- 2 ; 0 ; 0) et K (1 ; 0 ; 1) .
   a) Déterminer une représentation paramétrique de (JK) *vecteur* $\overrightarrow{JK}$
   b) Déterminer l'intersection de la sphère S et de la droite (JK) *on remplace les x , y et z de la question a) dans la question 4 .*

A vous de faire cet exercice !