Corrigé exercices fonction exponentielle

Exercice 1

1) $f(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ donc f '(x) = $e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)>0$ sur $]0;+\infty[$. La fonction f est donc croissante sur $]0;+\infty[$.
   Etudions maintenant les limites de f aux bornes de son domaine de définition
   $\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$
   Par calcul direct : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
2) $g(x)=1-(1+x)e^{-x}$ donc g'(x) = $e^{-x}(-1+1+x)=xe^{-x}>0$ sur $[0;+\infty[$.
3) Par la question précédente, g est croissante sur $[0;+\infty[$ et g(0) = 0 donc g(x) ≥ 0 sur $[0;+\infty[$

   Maintenant, étudions les variations de $h(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$.

   On a : h'(x) = $xe^{-x}-x=x\left(e^{-x}-1\right)$
   h'(x) est du signe de $e^{-x}-1$ sur $[0;+\infty[$. Or $x\geq 0$ donc $e^{-x}\leq 1$ donc h'(x) ≤ 0 et la fonction h est décroissante sur $[0;+\infty[$. h(0) = 0 donc h(x) ≤ 0 et $g(x)\leq\frac{x^2}{2}$
4) Calculons $x-f(x)=x-(x+1)e^{-\frac{1}{x}}=x\left(1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$. Or d'après la question précédente , on a : $0\leq g\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{2x^2}$ d'où $0\leq xg\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{2x}$. Donc

   $0\leq x-f(x)\leq\frac{1}{2x}$. Par le théorème des gendarmes , $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x-f(x)=0$ donc la droite d'équation y = x est asymptote à la courbe de f .
   De plus , $x\leq f(x)$ donc l'asymptote est en dessous de la courbe de f
5) On a : T : y = f '(a)(x – a) + f(a)
   D'où : $y=e^{-\frac{1}{a}}\left(\frac{1+a+a^2}{a^2}\right)(x-a)+(a+1)e^{-\frac{1}{a}}$

   Après simplification : y = $e^{-\frac{1}{a}}\left(\frac{1+a+a^2}{a^2}\right)x+e^{-\frac{1}{a}}\left(\frac{a^2+a-1-a-a^2}{a}\right)$

   Donc y = $e^{-\frac{1}{a}}\left(\frac{1+a+a^2}{a^2}\right)x-\frac{e^{-\frac{1}{a}}}{a}$

   Intersection avec l'axe des abscisses : y = 0 d'où : x = $\frac{a}{1+a+a^2}$

Exercice 2

1) D passe par J(0 ;1) et K(-1 ;0) .
   Soit y = ax + b l'équation de D alors : 1 = b et 0 = -a + b d'où : a = 1
   D : y = x + 1
   Par définition de l'asymptote oblique : m = 1 et p = 1
2) J est centre de symétrie de la courbe donc f(x + 0) + f(-x + 0) = 2 donc f(x) + f(-x) = 2
   On a donc : x + 1 + g(x) – x + 1 + g(-x) = 2 soit g(-x) = - g(x) et g impaire

Dérivons f(x) + f(-x) = 2

On a : f ’(x) – f ’(-x) = 0 d’où : f ’(x) = f ’(-x) et f est une fonction paire

3) Si on a : g(x) = $(ax+b)e^{-x^2}$ alors f(x) = x + 1 + $(ax+b)e^{-x^2}$.

Or J est sur la courbe donc 1 = 1 + b donc b = 0

De plus , le coefficient de la tangente en 0 est 1 – e donc f ’(0) = 1 – e .

On a f ’(x) = $1+e^{-x^2}\left(a-2ax^2-2bx\right)$ donc f ’(0) = 1 + a donc a = - e .

Donc f(x) = x + 1 $-exe^{-x^2} = x+1-xe^{1-x^2}$

4) Par la question précédente : f ’(x) = $1+e^{-x^2}(-e+2ex^2)=1+e^{1-x^2}(2x^2-1)$ et

f ’(0) = 1 – e . Etudions le signe de $f(x)-(1-e)x-1=-xe^{1-x^2}+ex=ex(1-e^{-x^2})$

Or $x^2 \geq 0$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante , $e^{-x^2} \leq 1$ donc $ex(1-e^{-x^2})$ est du signe de x .

La courbe est donc sous la tangente si x < 0 et au dessus si x > 0

5) Calculons

f ’’(x) = $e^{1-x^2}\left(4x-4x^3+2x\right)=2xe^{1-x^2}\left(3-2x^2\right)=2xe^{1-x^2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}x)(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)$

On a donc le tableau de variations de f ’ :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f ’’(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f ’(x)		↗		↘	1-e	↗	2,2	↘	

La fonction f ’ est continue et strictement croissante sur [0 ;1] et 0 est dans l’intervalle [1-e ;2,2] donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans [0 ;1] tel que f ’(a) = 0

Et on trouve : 0,51 < a < 0, 52 .

6) On a f ’(a) = 0 donc $1+e^{1-a^2}\left(2a^2-1\right)=0$ d’où : $e^{1-a^2} = \dfrac{1}{1-2a^2}$

On a donc : f(a) =

$$a+1-ae^{1-a^2} = a+1-\frac{a}{1-2a^2} = \frac{a+1-2a^3-2a^2-a}{1-2a^2} = \frac{-2a^3-2a^2+1}{1-2a^2}$$

<u>Exercice 3</u>

1) On a avec (R1) : f ² = 1 + g ² > 0 donc f non nulle
2) On a g²(0) = 1 – f ²(0) = 0 donc g(0) = 0
3) Dérivons (R1) : 2f ’f – 2g’g = 0 . De plus , par (R2) , g’ = f d’où puisque f $\neq 0$ on a :
   f ’ – g = 0 donc f ’(x) = g(x)
4) u(0) = 1 et v(0) = 1 .
   u’ = f ’ + g’ = g + f = u
   v’ = f’ – g’ = g – f = - v
   Puisque u’ = u et u(0) = 1 alors par définition de la fonction exponentielle u(x) = e^x
   L’équation v’ = v a pour solution : v(x) = ke^{-x} et puisque v(0) = 1 on a : v(x) = e^{-x}
   On a f = $\dfrac{u+v}{2}$ donc $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et g = $\dfrac{u-v}{2}$ donc $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 4

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+1}-e}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+1}-e}{x}\times\dfrac{x}{e^{3x}-1}$. Or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+1}-e}{x}=\left(e^{2x+1}\right)'(0)=2e$ et

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\left(e^{3x}\right)'(0)=3$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+1}-e}{e^{3x}-1}=\dfrac{2e}{3}$

Exercice 5

1) $f_n(x)=e^{-nx^2}$ donc $f_n'(x)=-2xne^{-nx^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_n	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) $f_n''(x)=e^{-nx^2}\left(-2n+4n^2x^2\right)=2ne^{-nx^2}(2nx^2-1)=0$ équivaut à $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

$A_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$ et $B_n\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2n}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$; ces deux points appartiennent à la droite

d'équation $y=e^{-\frac{1}{2}}$ pour tout n .

3) Donnons les équations respectives des tangentes en A_n et B_n

En A_n : y = $-\dfrac{2n}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)+e^{-\frac{1}{2}}$ soit y = $-\sqrt{2n}e^{-\frac{1}{2}}x+2e^{-\frac{1}{2}}$

En B_n : y = $\sqrt{2n}e^{-\frac{1}{2}}x+2e^{-\frac{1}{2}}$

Le point d'intersection de ces deux droites est I$\left(0;2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ qui ne dépend pas de n

Donc les tangentes passent toutes par un point fixe I qui ne dépend pas de n .

Exercice 6

$P_n(x)=x^{n+1}-2x^n+1$

Calculons $P_n'(x)=(n+1)x^n-2nx^{n-1}=x^{n-1}\left((n+1)x-2n\right)$

Nous allons devoir étudier deux cas selon la parité de n

Soit n entier pair

Alors n +1 et n – 1 sont impairs et donc :

x	$-\infty$	0	1	$\dfrac{2n}{n+1}$	$+\infty$
P'	+	0	-	0	+
P	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

De plus , n $\geq$ 1 donc 2n $\geq$ n + 1 et on peut placer 1 dans le tableau de variation

Or P(1) = 0 donc $P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$ et P(2) = 1

P est un polynôme donc continu , strictement croissant sur $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$, 0 est dans $\left[P\left(\frac{2n}{n+1}\right);P(2)\right]$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique réel a tel que P(a) = 0 dans $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$

<u>Si n est impair</u>

Alors n +1 et n – 1 sont pairs donc $x^{n-1} > 0$ pour tout x .

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} P_n(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$\frac{2n}{n+1}$	$+\infty$
P	↘		↗

La fin du raisonnement est identique au cas précédent