Corrigé des indispensables de la fonction exponentielle

1) Tout dépend de votre calculatrice , mais en général , la courbe semble monter et donc la fonction semble croissante

2) On a g(x) = $(x+2)e^{x-1}-1$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}=+\infty$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

$g(x)=\frac{1}{e}\left(xe^{x}+2e^{x}\right)-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ par croissance comparée ; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ par règles du cours donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$ (asymptote horizontale d'équation y = - 1)

b) g'(x) = $e^{x-1}+(x+2)(e^{x-1})=e^{x-1}(x+3)$. Or $e^{X}>0$ donc g'(x) est du signe de x + 3 donc g'(x) > 0 si x > - 3 et g est croissante si x > - 3 et décroissante si x < - 3

g(-3) = $-1-e^{-4}\approx-1{,}01$

c)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	-1	↘	$-1-e^{-4}$	↗	$+\infty$

d) La fonction g est continue car dérivable ; elle est strictement croissante sur $\left]-3;+\infty\right[$ et $0\in\left]-1-e^{-4};+\infty\right[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans $\left]-3;+\infty\right[$ tel que g(a) = 0 .

(on remarque que sur $\left]-\infty;-3\right[$ g(x) < 0)

g(0,20) = - 0,014 et g(0,21) = 0,003

donc puisque – 0, 014 < 0 < 0, 003 alors 0,2 < a < 0,21

e) par lecture du tableau de variation et par d) on a : g(x) < 0 sur $\left]-\infty;a\right[$ et g(x) > 0 sur $\left]a;+\infty\right[$

3) On a f(x) = $x^2e^{x-1}-\frac{x^2}{2}$ donc f '(x) = $2xe^{x-1}+x^2e^{x-1}-x=x\left[(2+x)e^{x-1}-1\right]=xg(x)$.

On a donc le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
x		-	0	+		+	
g(x)		-		-	0	+	
f '(x)		+	0	-	0	+	

La fonction f est donc croissante sur $\left]-\infty;0\right[\cup\left]a;+\infty\right[$ et décroissante sur]0 ;a[

La conjecture du début est donc fausse