Exercices fonction exponentielle

Exercice 1

1) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$. Etudier les variations de f et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=1-(1+x)e^{-x}$. Calculer g'(x) .
3) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $0\leq g(x)\leq \frac{x^2}{2}$
4) Montrer que $0\leq x-f(x)\leq \frac{1}{2x}$ pour tout $x\geq 0$.
   En déduire que la droite d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe de f .
   Etudier leur position relative
5) Soit a un réel de $]0;+\infty[$. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse a et donner les coordonnées du point d'intersection entre T et l'axe des abscisses
6) Tracer la courbe de f .

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on connaît quelques renseignements sur sa courbe :
J(0 ;1) est centre de symétrie de la courbe C et J est sur la courbe
La droite D passant par J et K(-1 ;0) est asymptote à C
La tangente T à C au point d'abscisse 0 a pour équation y = (1 – e) x + 1

1) Déterminer une équation de D . On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ tels que pour tout x : f(x) = m x + p + g(x) avec $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$
   Déterminer m et p .
2) Démontrer que pour tout x réel , f(x) + f(-x) = 2 . En déduire que la fonction g est impaire puis que la fonction f ' est paire .
3) On suppose que g(x) = $(ax+b)e^{-x^2}$. Déterminer a et b
4) Calculer f '(x) puis f '(0) . Etudier la position relative entre C et T
5) Etudier les variations de f ' et en déduire qu'il existe un unique a dans [0 ;1] tel que f '(a) = 0 . Donner un encadrement de a à 0,01 près .
6) Exprimer f(a) sous la forme d'un quotient de deux polynômes .

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les relations suivantes :
Pour tout réel x , $(f(x))^2-(g(x))^2=1$ (R1)
Pour tout réel x , f(x) = g'(x) (R2)
f(0) = 1   (R3)

1) Démontrer que pour tout x , $f(x)\neq 0$
2) Calculer g(0)
3) Montrer que pour tout réel x , g(x) = f '(x)
4) On pose u = f + g et v = f – g . Calculer u(0) et v(0) . Montrer que u' = u et v' = - v .
   En déduire les fonctions u et v puis les expressions des fonctions f et g .

Exercice 4

Déterminer $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x+1}-e}{e^{3x}-1}$

Exercice 5

Soit la fonction $f_n(x) = e^{-nx^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ pour tout n entier naturel non nul .

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative .

1) Dresser le tableau de variations de f_n .
2) Montrer que $f''_n(x) = 0$ a deux solutions opposées a_n et b_n . On note A_n et B_n les points de $\mathcal{C}_n$ d'abscisses respectives a_n et b_n . Montrer que pour tout n , les points A_n et B_n sont toujours sur la même droite .
3) Montrer que lorsque n varie , les tangentes à $\mathcal{C}_n$ aux points A_n et B_n passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées .

Exercice 6 (d'un bon niveau)

Pour tout entier n $\geq$ 1 , on note P_n le polynôme défini par $P_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$. Démontrer que le polynôme P_n admet une racine comprise entre $\frac{2n}{n+1}$ et 2