Les indispensables sur la fonction exponentielle

Les formules à savoir par cœur

Le domaine de définition

La fonction exponentielle est définie pour tout réel ; elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les règles de calculs

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$
$$e^0 = 1$$
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Les limites

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (comportement à l'origine)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier naturel n . (croissance comparée)

Et de façon générale , quand on a une forme indéterminée , l'exponentielle « l'emporte » sur les puissances de x .

La dérivée

$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$ avec u fonction dérivable .

Pense bête

La fonction exponentielle est toujours positive

Résoudre des équations

- La fonction exponentielle étant strictement croissante , on peut « enlever » le « e »

Exemple : $e^{x+2} = e^3$ équivaut à x + 2 = 3

- En pensant au fait que $e^{2x} = (e^x)^2$ on peut travailler avec une équation classique du second degré

Exemple : $2e^{2x} - 3e^x + 7 = 0$ revient à résoudre d'abord 2X² - 3X + 7 = 0 .

Lever une indétermination dans une limite

- Si la forme est développée , on peut factoriser : soit par la plus grande puissance de e^x , soit par la plus grande puissance de x , puis utiliser les croissances comparées si besoin

Exemples

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{2x} - e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(x - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - xe^x = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée

- Si la forme est factorisée , on développe .

Exemple

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x}(x^2 + x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{x} + x e^{x} - e^{x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$ par croissance comparée .

Etudier le signe de la dérivée

Il faut le faire proprement : on ne travaille pas avec des polynômes et donc il faut tout démontrer .

Exemple

$f'(x) = e^{x} - 1$

On doit écrire : $e^{x} - 1 > 0$ équivaut à $e^{x} > 1$

x > 0 car la fonction exp strictement croissante

Et on ne peut pas se contenter de faire le tableau de signes sans justification .

Les autres méthodes

Les asymptotes , tangentes , le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires … valables pour les autres fonctions sont toujours vrais ici !

Comment traiter un exercice

C'est une étude de fonction classique : on doit donc avoir les mêmes réflexes
Attention à l'unité
Justifier les limites , le signe de la dérivée
Quand on est bloqué , regarder les questions précédentes , la solution peut venir de là !

Un exemple

Lire cet énoncé avec un crayon et noter ce qui doit être remarqué et ce qui vient déjà à l'esprit pour aider à la résolution de l'exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $x^2 e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$

1) En affichant la courbe de cette fonction sur votre calculatrice dans l'intervalle [-3 ;2] , quelle conjecture pouvez-vous faire sur les variations de f ?
2) Soit la fonction g(x) = $(x+2)e^{x-1} - 1$ définie sur $\mathbb{R}$
    a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition
    b) Calculer g'(x) et étudier son signe suivant les valeurs de x
    c) Dresser le tableau de variations de g
    d) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une seule solution a dans $\mathbb{R}$. Montrer que 0,20 < a < 0,21
    e) Déterminer le signe de g suivant les valeurs de x
3) Calculer f '(x) et étudier son signe . En déduire le sens de variation de f . Que peut-on dire de votre conjecture ?

Solution

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $x^2e^{x-1}-\dfrac{x^2}{2}$

1) En affichant la courbe de cette fonction sur votre calculatrice dans l'intervalle [-3 ;2] , quelle conjecture pouvez-vous faire sur les variations de f ? *croissante ou décroissante sur quels intervalles*

2) Soit la fonction g(x) = $(x+2)e^{x-1}-1$ définie sur $\mathbb{R}$
   a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition *on développe si forme indéterminée , c'est le cas en* $-\infty$ *, par contre pas de problème en* $+\infty$
   b) Calculer g'(x) et étudier son signe suivant les valeurs de x *c'est la dérivée de u fois v .*
   c) Dresser le tableau de variations de g *variations + limites*
   d) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une seule solution a dans $\mathbb{R}$. Montrer que 0,20 < a < 0,21 *CTVI*
   e) Déterminer le signe de g suivant les valeurs de x *on lit le tableau de variations avec a mis dedans*

3) Calculer f '(x) et étudier son signe . En déduire le sens de variation de f . Que peut-on dire de votre conjecture ? *on doit retrouver g dans la dérivée de f . On utilise e) pour conclure .*

Et maintenant , faire cet exercice !