Les limites et la fonction exponentielle

Les techniques pour déterminer les limites

Tout d'abord les limites classiques à connaître : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$

Une valeur qu'on croise souvent et qui est incontournable : $e^0 = 1$

Et puis les fameuses « croissances comparées » : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0}$

- Se dire que l'exponentielle l'emporte sur n'importe quelle puissance de x en cas de forme indéterminée mais ne jamais l'écrire. Dans la rédaction, on justifie en écrivant « par croissance comparée »

Pour lever une indétermination avec des exponentielles, il y a donc deux nouvelles méthodes :
Factoriser par l'exponentielle de plus haut degré
Utiliser la croissance comparée

Exemple 1

Déterminer la limite en $+\infty$ de f(x) = $e^{2x} - e^x - 5$.
Par calcul direct , on a une forme indéterminée , factorisons par le plus haut degré :

f(x) = $e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{5}{e^{2x}}\right)$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{e^{2x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{5}{e^{2x}} = 1$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 2

Déterminer la limite en $+\infty$ de f(x) = $\dfrac{e^{x+2}}{x+1}$

Par calcul direct , on a une forme indéterminée , mais on va utiliser la croissance comparée ; pour cela il faut faire apparaître dans la forme exponentielle et au dénominateur de la fraction la même expression . Puisqu'on ne peut pas toucher à l'exponentielle , on « joue » avec la fraction .

f(x) = $\dfrac{e^{x+2}}{x+2} \times \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{e^{x+2}}{x+2} \times \dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{e^{x+2}}{x+2} \times \dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+2}}{x+2} = +\infty$ par croissance comparée

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- Une dernière astuce : si la fonction est sous une forme développée et qu'on a une forme indéterminée , il faut bien souvent la factoriser . A l'inverse , si la fonction est déjà sous forme factorisée et qu'on est en présence de forme indéterminée , penser à développer .

Exemple

Les limites et la fonction exponentielle

Déterminer la limite en $+\infty$ de f(x) = $x\left(e^{-x}+3e^{-2x}\right)$
Par calcul direct , on a une forme indéterminée , développons f :
f(x) = $xe^{-x}+3xe^{-2x}=xe^{-x}+\frac{3}{2}\left(2xe^{-2x}\right)$
De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-2x}=0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exercices

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1) f(x) = $\frac{e^{x}+x^{5}}{x^{3}}$ en $+\infty$
2) f(x) = $e^{2x}+e^{x}+1$ en $+\infty$ et en $-\infty$
3) f(x) = $\frac{e^{x}}{2+e^{x}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
4) f(x) = $\frac{e^{x}-2}{e^{x}+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
5) f(x) = $3xe^{-x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
6) f(x) = $x+3+xe^{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
7) f(x) = $x+1+\frac{3}{e^{x}+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
8) f(x) = $\frac{e^{x}}{x-1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
9) f(x) = $\frac{e^{2x}}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
10) f(x) = $\frac{7x}{e^{x}-1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
11) f(x) = $e^{x^{2}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
12) f(x) = $\frac{e^{3x}-3}{e^{x}+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

13) f(x) = $\frac{e^{-x}}{e^{2x}+5}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
14) f(x) = $\exp\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$ en $+\infty$ et en $-\infty$
15) f(x) = $xe^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
16) f(x) = $e^{3x}-e^{2x}-1$ en $+\infty$ et en $-\infty$
17) f(x) = $\frac{e^{x}}{x-1}$ en 1
18) f(x) = $\frac{e^{x}}{x}$ en 0
19) f(x) = $\frac{7x}{e^{x}-1}$ en 0
20) f(x) = $e^{\cos x}$ en 0
21) f(x) = $e^{-(x^{2}+3x)}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
22) f(x) = $e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ en $-\infty$ et en 0
23) f(x) = e^{1-2x} en $+\infty$ et en $-\infty$
24) f(x) = $e^{-x^{2}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
25) f(x) = $e^{\frac{x}{x+1}}$ en $+\infty$ en $-\infty$ et en -1
26) $f(x)=x^{2}+2-e^{x}$ en $+\infty$
27) $f(x)=\frac{2e^{x}-x}{x^{2}}$ en $+\infty$
28) $f(x)=\frac{e^{x}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$