Variations de la fonction exponentielle

Rappels des formules importantes

La dérivée de e^u est $u'e^u$.

On a aussi besoin d'étudier le signe de la dérivée .
Les calculs avec le discriminant restent valables mais on aura aussi besoin d'utiliser les résolutions d'inéquations du premier degré avec des exponentielles
On sait que e^x est une fonction croissante donc : a < b si et seulement si $e^a < e^b$.

- Attention à la rédaction dans ces résolutions :
  x > 3 équivaut à $e^x > e^3$ car e^x est une fonction croissante
  x > 3 équivaut à $xe^x > 3e^x$ car e^x est une fonction positive .

Enfin , rappelons que e^x est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Exercice 1

Donner la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$
2) $f(x) = e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$
3) $f(x) = x^2e^x$
4) $f(x) = e^x - 3x - 1$
5) $f(x) = (-3x^2+5)e^x$
6) $f(x) = \cos xe^x$
7) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$
8) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} + 2x - 1$
9) $f(x) = (-2x+5)e^x$
10) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x+1}$
11) $f(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$
12) $f(x) = e^x - \sqrt{x} + 4$
13) $f(x) = x - \dfrac{\sin x}{e^x}$
14) $f(x) = e^{3x^2-2x+1}$
15) $f(x) = e^{\sin x}$
16) $f(x) = (3-x)e^{\frac{1}{x}}$
17) $f(x) = e^{\frac{2x+1}{x+3}}$
18) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
19) $f(x) = xe^x$
20) $f(x) = (3x-2)e^x$
21) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
22) $f(x) = \dfrac{2e^x}{x-1}$
23) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^{2x}-3}$
24) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Exercice 2

Résoudre

1) $e^{3x} < 1$
2) $e^{-x^2} - e^{2x+1} \geq 0$
3) $e^{x+2} - e^{-\frac{1}{x}} \leq 0$
4) $e^{x^2} - e^{5x-4} > 0$
5) $e^x - e^{-x} < 0$
6) $e^{5x} = -1$
7) $e^{-x^2+x} \leq 1$
8) $e^{x-3} \geq \dfrac{1}{e^x}$

Exercice 3

Etudier le signe de la fonction donnée sur $\mathbb{R}$

1) $f(x) = e^{-3x+1}$
2) $f(x) = (4x-3)e^{-x}$
3) $f(x) = (x^2 - 2x)(e^x - 1)$
4) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{e^x+1}$
5) $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$
6) $f(x) = e^x - x - 1$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par f(x) = $2e^x + ax + b$. On appelle C sa courbe représentative .

1) Déterminer a et b sachant que C passe par l'origine du repère et que la tangente à C au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 3
2) Etudier les variations de f
3) Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de T et de C

Exercice 5

Soit la fonction f définie par f(x) = $x + \dfrac{e^x}{e^x+1}$ de courbe représentative C .

1) Etudier les variations de f
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire d'éventuelles asymptotes
3) Démontrer que la droite d'équation y = x + 1 est asymptote à la courbe C
4) Déterminer le point d'intersection I de C avec l'axe des ordonnées et montrer que I est centre de symétrie de C

Exercice 6

Soit la fonction f définie par f(x) = $x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$. On note C sa courbe représentative .

Soit g définie par g(x) = $1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1) Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition
2) Etudier le sens de variations de g
3) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une unique solution a dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près
4) En déduire le signe de g
5) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
6) Etudier les variations de f
7) Montrer que la droite d'équation y = x – 1 est asymptote oblique à la courbe C . Préciser leur position relative
8) Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0

Exercice 7

Soit g(x) = $e^x + x + 1$

1) Etudier les variations de g
2) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et en déduire d'éventuelles asymptotes
3) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une unique solution a dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près .
4) En déduire le signe de g

Variations de la fonction exponentielle

On donne f(x) = $\frac{xe^x}{e^x+1}$. On appelle C sa courbe représentative

1) Etudier les variations de f
2) Montrer que f(a) = a + 1
3) Déterminer l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 et étudier leur position relative
4) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire d'éventuelles asymptotes
5) Démontrer que la droite d'équation y = x est asymptote à C et étudier leur position relative.