<u>Exercice 1</u>

1) f '(x) = 1 + tan² x – 1 = tan ² x > 0 donc la fonction f est croissante .De plus, f(0) = 0 donc la fonction f est positive : $\tan x - x \geq 0$
2) g'(x) = $1 + \tan^2 x - 1 - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x) \geq 0$ par 1) donc la fonction g est croissante et g(0) = 0 donc $\tan x - x - \frac{x^3}{3} \geq 0$
3) h'(x) = $1 + \tan^2 x - \sqrt{2} = \left(\tan x + \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(\tan x - \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ qui est du signe de $\tan x - \tan a$. Or la fonction tan est croissante donc $\tan x > \tan a$ si x > a. Donc la fonction h est décroissante sur $]0;a]$ et h est croissante sur $\left[a;\frac{\pi}{2}\right[$.

x	0		a		$\frac{\pi}{2}$
h(x)	0	↘	h(a)	↗	$+\infty$

Par le tableau de variations, on remarque que h(a) < 0

On sait que h est continue et strictement croissante sur $\left[a;\frac{\pi}{2}\right[$ et 0 est dans $]h(a);+\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique b dans $\left[a;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que h(b) = 0

On en déduit : h(x) < 0 si x < b et h(x) > 0 si x > b

4) k'(x) = tan² x + 1 – 1 – 2 x² = $\left(\tan x - \sqrt{2}x\right)\left(\tan x + \sqrt{2}x\right)$ et par la question précédente, on a le tableau de variations suivant :

x	0		b		$\frac{\pi}{2}$
k'(x)		-	0	+	
k(x)	0	↘	k(b)	↗	$+\infty$

Par le même raisonnement que dans la question 3) on trouve c unique dans $\left]b;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que k(c) = 0

On en déduit donc que k(x) < 0 si x < c et k(x) > 0 si x > c

5) $k\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi^3}{81} \approx -0{,}08 < 0$ donc $\frac{\pi}{3} < c$. Donc sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ k(x) < 0 et en utilisant la question 2) on obtient l'encadrement demandé

Corrigé fonctions trigonométriques

Exercice 2

1) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{(1+\sin x)^2}$ existe si $1+\sin x\neq 0$ donc Df = $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

$f(x+2\pi)=\dfrac{\sin^3(x+2\pi)}{(1+\sin(x+2\pi))^2}=\dfrac{\sin^3 x}{(1+\sin x)^2}=f(x)$ donc f est une fonction 2π -périodique

$f(\pi-x)=\dfrac{\sin^3(\pi-x)}{(1+\sin(\pi-x))^2}=\dfrac{\sin^3 x}{(1+\sin x)^2}=f(x)$

Soit le point $M(\pi-x; f(x))$ et le point M'(x ; f(x)). On va montrer que M et M' sont symétriques par rapport à la droite d d'équation x = $\dfrac{\pi}{2}$

Soit I le milieu de [MM'] alors $I\left(\dfrac{\pi}{2}; f(x)\right)$ appartient bien à d

Un vecteur normal de d est $\vec{u}(1;0)$ et $\overrightarrow{MM'}(2x-\pi;0)$: ces deux vecteurs sont colinéaires donc d est la médiatrice de [MM']

La courbe de f admet donc pour axe de symétrie la droite d'équation x = $\dfrac{\pi}{2}$

2) Puisque f est périodique de période 2π on peut travailler sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$; de plus la courbe admet la droite d'équation x = $\dfrac{\pi}{2}$ donc on peut restreindre encore l'intervalle à $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on dessinera la courbe par symétrie puis en reportant le motif

3) $f'(x)=\dfrac{3\sin^2 x\cos x(1+\sin x)^2-2\cos x(1+\sin x)\sin^3 x}{(1+\sin x)^4}=\dfrac{\sin^2 x\cos x(3+3\sin x-2\sin x)}{(1+\sin x)^3}$

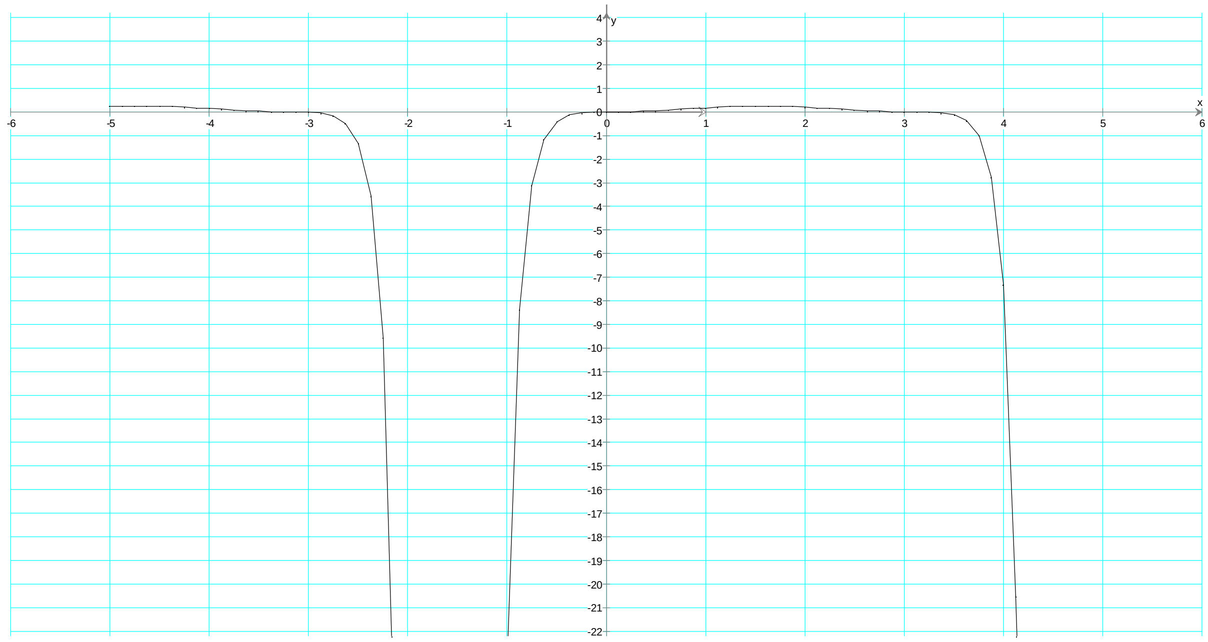
$f'(x)=\dfrac{\sin^2 x\cos x(3+\sin x)}{(1+\sin x)^3}\geq 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc la fonction f est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Calculons maintenant les limites de f aux bornes de cet intervalle :

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(1+\sin x)^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\sin^3 x=-1$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=-\infty$

De la même façon : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=+\infty$

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

4) 

Exercice 3

$$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

1) Df $=\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi\}$

f est 2π - périodique donc on peut travailler sur $]-\pi;\pi[$

f (-x) = - f(x) donc la fonction est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère on peut donc travailler sur $]0;\pi[$

2) $$f'(x)=\frac{(\cos^2x-\sin^2x)(1+\cos x)^2-2(1+\cos x)(-\sin x)\sin x\cos x}{(1+\cos x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(\cos^2x-\sin^2x)(1+\cos x)+2\sin^2x\cos x}{(1+\cos x)^3}=\frac{(1+\cos x)(\cos^2x-\sin^2x+2\sin^2x)-2\sin^2x}{(1+\cos x)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(1+\cos x)-2\sin^2x}{(1+\cos x)^3}=\frac{(1+\cos x)-2(1-\cos^2x)}{(1+\cos x)^3}=\frac{(1+\cos x)(1-2(1-\cos x))}{(1+\cos x)^3}$$

$$f'(x)=\frac{2\cos x-1}{(1+\cos x)^3}=2\left(\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{(1+\cos x)^3}\right)$$. Or $\cos x-\frac{1}{2}\geq 0$ si $x\leq\frac{\pi}{3}$ et 1 + cos x > 0 donc la fonction f est croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{3}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{\pi}{3};\pi\right[$

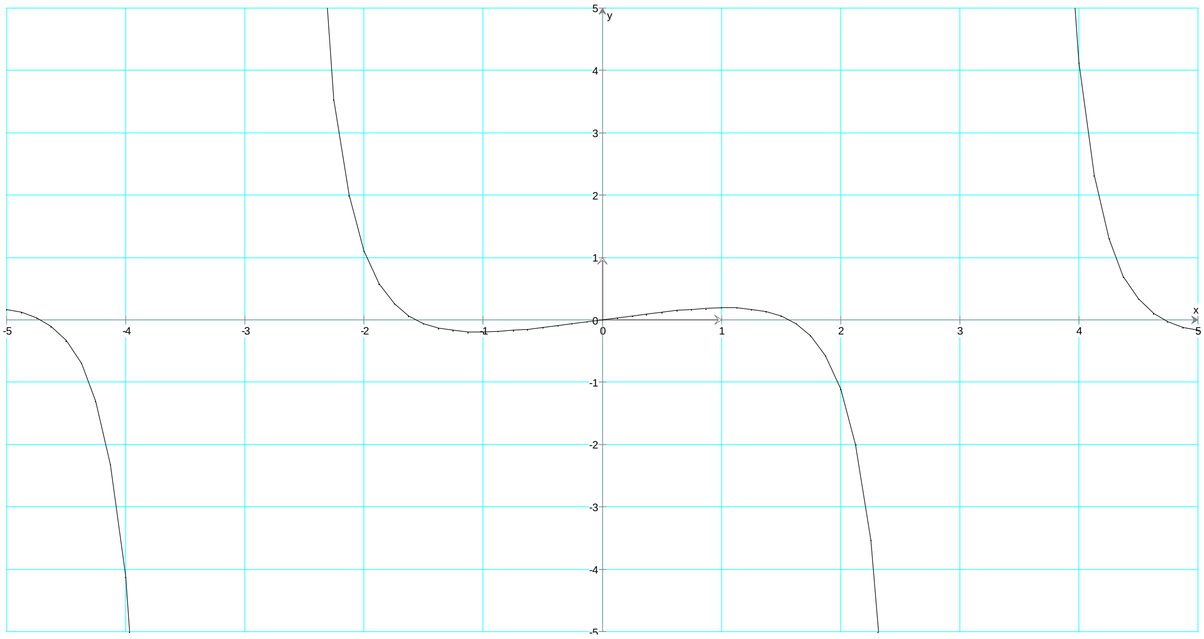
3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ par calcul direct

$$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}{4\cos^4\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos x}{4\cos^3\frac{x}{2}}$$; or $\lim\limits_{x\to\pi^-} 4\cos^3\frac{x}{2}=0^+$ et

$\lim\limits_{x\to\pi^-} 2\sin\frac{x}{2}\cos x=-2$ donc $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=-\infty$

De plus $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

4) On a f(x) = 0 si et seulement si : sin x cos x = 0 donc pour x = 0 ou $\frac{\pi}{2}$. Les points A (0 ; 0) et B ($\frac{\pi}{2}$; 0) sont les points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

5) 

Exercice 4

1) On a v'(x) = u'(x) – 2x donc
$(x+1)v'(x)+v(x)=(x+1)(u'-2x)+u-(x^2-1)=(x+1)u'+u-3x^2-2x+1=0$ car u vérifie (E1)
2) $w'(x)=v+(x+1)v'=0$ car v vérifie (E2) donc w(x) = k avec k réel
3) On a alors : v(x) = $\frac{k}{x+1}$ et u(x) = v(x) + x² - 1 = $\frac{k}{x+1}+x^2-1$

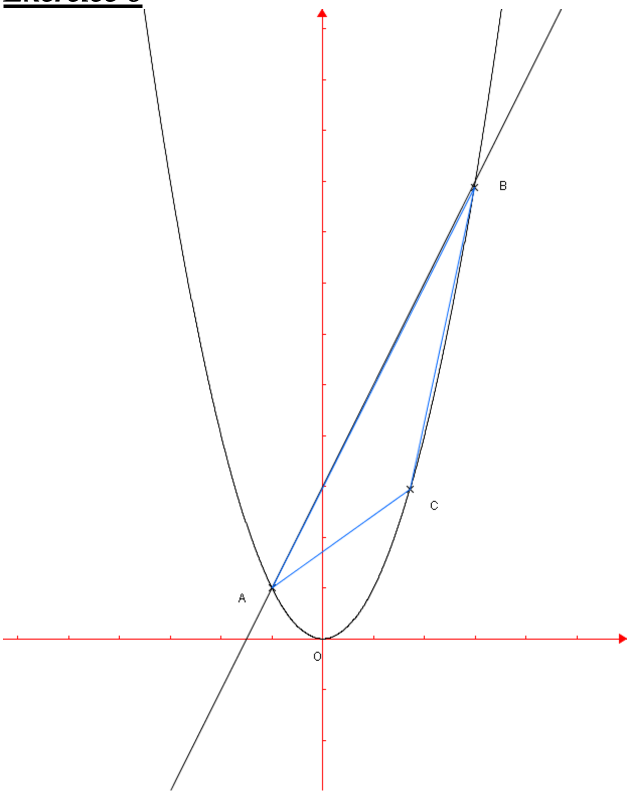
Exercice 5

1) La fonction f est strictement croissante et continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, et l'intervalle image de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est $\mathbb{R}$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y il existe un unique réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que tan x = y
2) tan 0 = 0 donc arctan 0 = 0 ; $\tan\frac{\pi}{4}=1$ donc arctan 1 = $\frac{\pi}{4}$; $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ donc $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$
3) Si M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x et si M(x ; y) alors M' (y ; x). Montrons déjà cette propriété

M(x, y) et M'(x', y') alors $\overrightarrow{MM'}(x'-x; y'-y)$ orthogonal à $\vec{u}(1;1)$ vecteur directeur de l'axe de symétrie donc x' – x + y' – y = 0 c'est-à-dire : x' + y' = x + y (*)
De plus le milieu de [MM'] est sur l'axe donc : x + x' = y + y' soit x' – y' = y – x (**)
En additionnant (*) et (**) on obtient : x' = y et donc y' = x

Utilisons cette propriété ; Soit M(x, tan x) alors son symétrique par rapport à la droite d'équation y = x est M' (tan x, x) mais on a vu que x = arctan tan x donc
M'(X, arctan X)

Exercice 6



Pour savoir quand le triangle ABC a une aire maximale, il faut étudier la fonction représentant cette aire.
On sait que (AB) : y = ax + b
Cherchons les coordonnées de A et B : x² - ax – b = 0.

- supposons a² + 4 b > 0 alors $A\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2};\dfrac{\left(a-\sqrt{a^2+4b}\right)^2}{4}\right)$ et

$B\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2};\dfrac{\left(a+\sqrt{a^2+4b}\right)^2}{4}\right)$

Soit C(x ; x²)
Cherchons le projeté orthogonal de C sur (AB) : C'(x' ; y') alors : (CC') est perpendiculaire à (AB) et leurs vecteurs sont donc orthogonaux : $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ donc
$\sqrt{a^2+4b}(x'-x)+a\sqrt{a^2+4b}(y'-x^2)=0$ et C' sur (AB) donc y' = ax' + b

On obtient donc : $x'=-a(ax'+b-x^2)+x$ autrement dit : $x'=\dfrac{ax^2+x-ab}{1+a^2}$ et donc

$$y'=\frac{a^2x^2+ax-a^2b+b+a^2b}{1+a^2}=\frac{a^2x^2+ax+b}{1+a^2}$$

On peut maintenant calculer l'aire de ABC :

A(x) = $\frac{AB\times CC'}{2}$ or $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{a^2+4b};a\sqrt{a^2+4b}\right)$ donc AB = $\sqrt{(1+a^2)(a^2+4b)}$

$\overrightarrow{CC'}\left(\frac{ax^2+x-ab-x-a^2x}{1+a^2};\frac{a^2x^2+ax+b-x^2-a^2x^2}{1+a^2}\right)$ donc

$\overrightarrow{CC'}\left(-\frac{a\left(ax+b-x^2\right)}{1+a^2};\frac{ax+b-x^2}{1+a^2}\right)$ et donc CC' = $\frac{(ax+b-x^2)}{1+a^2}\sqrt{1+a^2}$

Donc A(x) = $\frac{\left(\sqrt{a^2+4b}\right)(ax+b-x^2)}{2}$

A'(x) = $\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\left(a-2x\right)$ donc la fonction A admet un maximum en x = a/2

Le point C a donc pour coordonnées $\left(\frac{a}{2};\frac{a^2}{4}\right)$

Si $a^2 + 4b < 0$, il n'y a pas de point d'intersection antre la courbe et la droite et donc il n'y a pas de question !

Si $a^2 + 4b = 0$ alors A = B et il n'y a pas de triangle ABC.