Fonctions trigonométriques

Exercice 1(une méthode très classique au bac)

1) Etudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par f(x) = tan x – x
2) En déduire les variations de la fonction g définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3}$
3) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=\tan x-x\sqrt{2}$. On notera a le réel unique de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$. En déduire qu'il existe un unique réel b de $\left]a;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que h(b) = 0
4) Etudier les variations de la fonction k définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $k(x)=\tan x-x-\frac{2x^3}{3}$.
   En déduire qu'il existe un unique réel c dans $\left]b;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que k(c) = 0.
5) Montrer que $0<\frac{\pi}{3}<c$ et en déduire que pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ on a
   $x+\frac{x^3}{3}\leq\tan x\leq x+\frac{2x^3}{3}$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{\sin^3 x}{(1+\sin x)^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis montrer que f est une fonction périodique .Montrer que $f(\pi-x)=f(x)$ et en déduire un axe de symétrie pour la courbe de f
2) On restreint l'intervalle d'étude à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Expliquer pourquoi c'est possible et quel procédé utiliser pour construire la courbe de C.
3) Etudier les variations de f sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et donner son tableau de variations
4) Tracer C

Exercice 3 (plus difficile)

Soit la fonction f définie sur $]-\pi;\pi[$ par $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}$

1) Restreindre l'intervalle d'étude en utilisant des propriétés de la fonction f
2) Etudier les variations de f sur cet intervalle d'étude
3) Donner les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude
4) Résoudre f(x) = 0 sur l'intervalle d'étude
5) Tracer la courbe de f dans un repère d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

Exercice 4

On note E l'ensemble des fonctions u définies et dérivables sur $]-1;+\infty[$ telles que pour tout x de $]-1;+\infty[$, $(x+1)u'(x)+u(x)=3x^2+2x-1$ (E1)

1) Démontrer que si u vérifie (E1) alors $v(x)=u(x)-(x^2-1)$ vérifie $(x+1)v'(x)+v(x)=0$ (E2)
2) Démontrer que si v vérifie (E2) alors w(x) = (x + 1) v(x) est une fonction constante sur $]-1;+\infty[$
3) En déduire l'expression de u.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par f(x) = tan x

1) Montrer que pour tout réel y l'équation tan x = y admet une solution unique x dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
2) La fonction qui à tout réel y associe l'unique réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que tan x = y s'appelle fonction Arctangente ; on la note Arctan . Calculer $\arctan 0$, $\arctan 1$ et $\arctan\sqrt{3}$
3) Montrer que dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions f et Arctan sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x. Construire ces deux courbes.

Exercice 6 (question ouverte)

Dans un repère orthonormal, la droite d'équation y = ax + b coupe la parabole d'équation $y = x^2$ en deux points A et B. Déterminer le point C de l'arc AOB de la parabole qui rend l'aire du triangle CAB maximale.