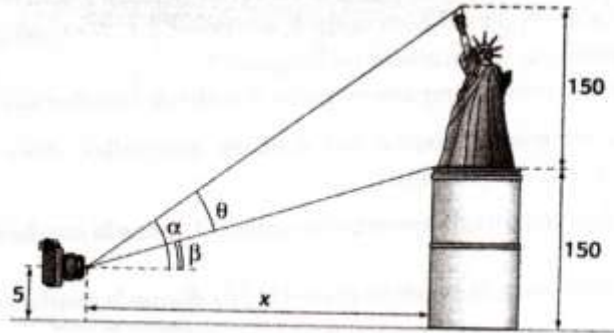


TD 7 Optimisation

Note
D'après *Problem Book for first year calculus*, Springer-Verlag.

La statue de la Liberté, haute de 150 pieds, est posée sur un piédestal de 150 pieds. Nous vous proposons de trouver à quelle distance de la base du piédestal, il faut placer un appareil photo pour que l'angle sous lequel on voit la statue dans l'objectif soit le plus grand possible. L'objectif de l'appareil est à 5 pieds du sol, supposé plat. Pour cela, notons x la distance de l'appareil photo à la statue. Les angles θ , α , β (exprimés en radians), indiqués sur la figure, sont fonctions de x . Nous supposons que la fonction $x \mapsto \theta(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.



1. Exprimez $\tan \alpha(x)$ et $\tan \beta(x)$ en fonction de x .

Puis, en écrivant que $\theta(x) = \alpha(x) - \beta(x)$, vérifiez que $\tan \theta(x) = \frac{150x}{x^2 + (295 \times 145)}$.

2. Posons $f(x) = \tan \theta(x)$.

a) Démontrez que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donnez sa fonction dérivée. Déduisez-en que :

$$[1 + \tan^2 \theta(x)] \theta'(x) = \frac{150((295 \times 145) - x^2)}{(x^2 + (295 \times 145))^2}$$

b) Donnez le tableau de variations de θ .

Démontrez que θ admet un maximum sur $]0; +\infty[$, puis concluez.