<u>Corrigé formule de Wallis</u>

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2) On pose u = $\sin^{n-1} x$ et v' = sin x ; on obtient : u' = (n-1) cos x $\sin^{n-2}$x et v = - cos x .

D'où : $I_n = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx$

= $(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ c'est-à-dire $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3) $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$ et en utilisant la formule du 2) ; $I_3 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3\pi}{16}$ et $I_5 = \frac{8}{15}$.

4) a) vrai au rang n = 1 ; on suppose que la formule proposée est vraie au rang n , or on sait que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ donc $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{1\times 3\times 5\times ...(2n-1)}{2\times 4\times ...(2n)} \times \frac{\pi}{2}$ ce qui est bien la formule souhaitée au rang n + 1 .

b) même principe .

5) a) $\sin^n x - \sin^{n+1} x = \sin^n x\ (1 - \sin x) > 0$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$. Par conservation de l'ordre par passage aux intégrales , on en déduit que $I_n > I_{n+1}$ et que la suite (I_n) est décroissante .

b) $I_n < I_{n-1}$ car la suite est décroissante . et $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} \le I_n$ (première partie par (1) et deuxième car la suite est décroissante donc $I_{n+1} < I_n$.

c) l'encadrement du b) peut s'écrire : $\frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \le I_{2n+1} \le I_{2n}$ c'est-à-dire car $I_{2n} > 0$:

$\frac{2n+1}{2n+2} \le \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$ et par le th des gendarmes , le quotient central tend vers 1 .

6) $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = w_n \times \frac{2}{\pi}$ donc en utilisant 5)c) , on a le résultat .