Exercice 1

1) I = $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$. Commençons par linéariser

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) = \frac{1}{16}\left(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6\right) =$$

$\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$. Donc I =

$$\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos 4x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x dx + \frac{3}{8}\int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} + \frac{3}{8}[x]_0^{\pi} = \frac{3}{8}\pi$$

2) I = $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$. Commençons par linéariser

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left(e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}\right) =$$

$\frac{1}{32i}(2i\sin 5x - 10i\sin 3x + 20i\sin x) = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$. Donc I =

$$\left[-\frac{1}{16}\times\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{5}{8}\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{80}(-2) + \frac{5}{48}(-2) - \frac{5}{8}(-2) = \frac{16}{15}$$

Exercice 2

Regardons d'abord le signe de f : sur [1 ;4] , f(x) ≥ 0 .

Donc A = $\int_1^4 3x - 3dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - 3x\right]_1^4 = 24 - 12 - \frac{3}{2} + 3 = \frac{27}{2}$ u.a.

Exercice 3

$$\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} 2x + 3dx = \frac{1}{2}\left[x^2+3x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(4-(-2)\right) = 3$$

Exercice 4

1) On a : y = 1 (x – 0) + 1 donc y = x + 1 . Etudions la position relative de la courbe et de la tangente . Soit g(x) = e^x – x – 1 . Le but est d'étudier le signe de g . On va étudier les variations de g : g'(x) = e^x – 1 . De plus e^x > 1 si x > 0 . On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc par lecture du tableau de variations , g(x) ≥ 0 . On en conclut que $e^x \geq x + 1$ donc la courbe est au dessus de sa tangente .

2) On a : $e^x \geq x + 1$ donc par conservation de l'ordre : $\int_{-1}^{1} e^x dx \geq \int_{-1}^{1} x+1 dx$ et

$\int_{-1}^{1} x+1dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1 = 2$ d'où l'inégalité demandée .

<u>Exercice 5</u>

1) Par la même méthode que dans l'ex 4 , on a $e^x \geq x + 1$ pour tout x . En particulier , on peut poser x = - ln t . Donc $e^{-\ln t} \geq -\ln t + 1$ pour t $\in \left]0;+\infty\right[$. On obtient ainsi :

   $e^{\ln(\frac{1}{t})} \geq -\ln t + 1$ et $\frac{1}{t} + \ln t \geq 1$ pour t $\in \left]0;+\infty\right[$.

2) Soit g(x) = (x + 1) ln x .

   g'(x) = ln x + $\frac{x+1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$ par 1) donc g est croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x+1)\ln x = -\infty$.

3) C'est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses , la courbe de g et les droites d'équation x = n et x = n + 1 .

4) On a : $n \leq x \leq n+1$, et g croissante donc $g(n) \leq g(x) \leq g(n+1)$.

   Par conservation de l'ordre : $\int_{n}^{n+1} g(n)dx \leq u_n \leq \int_{n}^{n+1} g(n+1)dx$ d'où :

   $g(n)\int_{n}^{n+1} dx \leq u_n \leq g(n+1)\int_{n}^{n+1} dx$

   et $g(n)[x]_n^{n+1} \leq u_n \leq g(n+1)[x]_n^{n+1}$

   et $g(n) \leq u_n \leq g(n+1)$ pour tout n .

   On a donc aussi : $-g(n+2) \leq -u_{n+1} \leq -g(n+1)$

   et donc : $u_n - u_{n+1} \leq 0$ donc la suite (u_n) est croissante .

   De plus $g(n) \leq u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = +\infty$ donc par le théorème de majoration :

   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et la suite (u_n) diverge .

<u>Exercice 6</u>

1) Calculons f(x) – (x – 2) = e^{1-x} . De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0$.

   Donc la droite d'équation y = x – 2 est asymptote à la courbe en $+\infty$.

   De plus $e^{1-x} > 0$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote .

2) $\int_{0}^{8} f(x) - (x-2)dx = \int_{0}^{8} e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^8 = -e^{-7} + e$ u.a

<u>Exercice 7</u>

1) $\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx = \left[\ln(x^2+x-1)\right]_1^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx = \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

Corrigé intégration

Exercice 8

1) $\int_{-1}^{1}(3x-1)e^{x+2}$. On pose u = 3 x – 1 et v’ = e^{x+2} on obtient u’ = 3 et v = e^{x+2} . D’où :

$\int_{-1}^{1}(3x-1)e^{x+2} = \left[(3x-1)e^{x+2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}3e^{x+2}dx = 2e^3 + 4e - 3\left[e^{x+2}\right]_{-1}^{1} = 2e^3 + 4e - 3e^3 + 3e = -e^3 + 7e$

2) $\int_{1}^{e} x\ln x dx$. On pose u = ln x et v’ = x ; on obtient u’ = 1/x et v = x²/2 . D’où :

$\int_{1}^{e} x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e}\frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{1}^{e} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

3) $\int_{0}^{\pi} x\cos x dx$. On pose u = x et v’ = cos x ; on obtient u’ = 1 et v = sin x . D’où :

$\int_{0}^{\pi} x\cos x dx = [x\sin x]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\sin x dx = [\cos x]_{0}^{\pi} = -2$

4) $\int_{-1}^{2}(3x+1)e^{-x}dx$. On pose u = 3x + 1 et v’ = e^{-x} ; on obtient : u’ = 3 et v = - e^{-x} . D’où

$\int_{-1}^{2}(3x+1)e^{-x}dx = \left[-(3x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{2} - \int 3(-e^{-x})dx = -7e^{-2} - 2e - 3\left[e^{-x}\right]_{-1}^{2} = -7e^{-2} - 2e - 3e^{-2} + 3e$

$= -10e^{-2} + e$