Corrigé indispensables en calcul intégral

1) a) f(x) = $\frac{2x+3}{x+2}$ donc f '(x) = $\frac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$ > 0 ; la fonction f est donc croissante . De plus , f(0) < f(x) < f(2) et f(0) = $\frac{3}{2}$, f(2) = $\frac{7}{4}$ d'où l'encadrement demandé

b) La fonction e^X est strictement positive donc : $\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}} \geq \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}} \geq \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}$

L'intégration conserve l'ordre donc : $\int_0^2 \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}dt \geq \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt \geq \int_0^2 \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}dt$

Par linéarité : $\frac{7}{4}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt \geq u_n \geq \frac{3}{2}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt$. Or $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt = \left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_0^2 = ne^{\frac{2}{n}} - n$

D'où : $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$

c) On a : $n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) = \frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 2\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}} = 1$ et $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$

2) a) $2 - \frac{1}{t+2} = \frac{2(t+2)-1}{t+2} = \frac{2t+3}{t+2}$

b) $\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt =$

$\int_0^2 2dt - \int_0^2 \frac{1}{t+2}dt = [2t]_0^2 - [\ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln 4 + \ln 2 = 4 - 2\ln 2 + \ln 2 = 4 - \ln 2$

c) 0 < t < 2 donc $0 < \frac{t}{n} < \frac{2}{n}$ et $1 < e^{\frac{t}{n}} < e^{\frac{2}{n}}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante

d) Si t est dans [0 ;2] alors $\frac{2t+3}{t+2} > 0$; on peut donc utiliser l'encadrement précédent :

$\frac{2t+3}{t+2} < \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}} < \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}$

L'intégration conserve l'ordre donc : $\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt < \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt < \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}dt$

Soit : $I < u_n < \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}dt = e^{\frac{2}{n}}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt$ et donc $I < u_n < e^{\frac{2}{n}}I$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$ donc par le théorème des gendarmes , la suite (u_n) converge et sa limite est égale à I c'est-à-dire 4 – ln 2