Les indispensables dans le calcul intégral

Les formules à savoir

Avec les primitives

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f

Aire et intégrale

Si f est une fonction positive , l'aire du domaine compris entre les droites d'équation x = a , x = b , l'axe des abscisses et la courbe de f est égale à $\int_a^b f(t)dt$ u.a.

Conservation de l'ordre

Si f < g alors $\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$ avec a < b .

Ça marche aussi pour le signe !

Pense bête

Pour les primitives

Bien connaître ses formules de dérivées et ne pas essayer d'apprendre les formules de primitives sinon , c'est l'embrouillaminis assuré !

Aire

- Toujours faire attention au signe car une intégrale correspond à une aire uniquement dans le cas où la fonction dans l'intégrale est positive
- Si on cherche l'aire comprise entre deux courbes , penser à faire la fonction de la courbe du haut moins la fonction de la courbe du bas
- Enfin , si vous avez un résultat négatif quand vous calculez une aire , c'est qu'il y a une erreur !

Analyser un énoncé

Il y a deux grands types d'énoncé

- Le premier concerne des études de fonction qui a pour but un calcul d'aire

Il faut bien connaître les méthodes concernant les fonctions , ses dérivées …

- Le second a pour but de déterminer par encadrement une limite de suite d'intégrales .

Il faut dominer les manipulations de l'intégrale (conservation de l'ordre et du signe qui aboutit à l'encadrement)

Les indispensables dans le calcul intégral

Exemple

Lire cet énoncé avec un crayon et noter ce qui doit être remarqué et ce qui vient déjà à l'esprit pour aider à la résolution de l'exercice

Dans cet exercice n est un entier naturel non nul

On considère la suite (u_n) par : $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1) a) Soit la fonction f définie sur [0 ;2] par f(x) = $\frac{2x+3}{x+2}$. Etudier les variations de f sur [0 ;2] et en déduire que si x est dans l'intervalle [0 ;2] , alors $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{7}{4}$

   b) En déduire que $\frac{3}{2} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$

   c) On suppose que la suite (u_n) converge . En déduire un encadrement de la limite de la suite (u_n)

2) a) Vérifier que $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$ pour tout t de [0 ;2]

   b) On pose I = $\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$. Calculer I

   c) Montrer que pour tout t de [0 ;2] , on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$

   d) En déduire que pour tout n : $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$

   e) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite .

Solution

1) a) Soit la fonction f définie sur [0 ;2] par f(x) = $\frac{2x+3}{x+2}$. Etudier les variations de f sur [0 ;2] *dérivée* et en déduire que si x est dans l'intervalle [0 ;2] , alors $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{7}{4}$ *lecture tableau de variations*

   b) En déduire que $\frac{3}{2} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$ *conservation de l'ordre par passage à l'intégrale*

   c) On suppose que la suite (u_n) converge . En déduire un encadrement de la limite de la suite (u_n) *th des gendarmes*

2) a) Vérifier que $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$ pour tout t de [0 ;2] *on met au même dénominateur*

   b) On pose I = $\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$. Calculer I *on utilise a)*

   c) Montrer que pour tout t de [0 ;2] , on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ *fonction exp croissante*

   d) En déduire que pour tout n : $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$ *conservation de l'ordre par intégrale*

   e) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite . *th gendarmes*

Et maintenant , faire l'exercice