Intégration

Calcul d'intégrales

Nous avons deux types de calculs d'intégrales

En utilisant des primitives

On rappelle la formule à savoir (une fiche méthode sur les primitives existe dans ce site)

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f

Attention , on prend d'abord la valeur du haut dans le crochet quand on remplace les x .

En utilisant une intégration par parties *(hors programme mais intéressant pour ceux qui poursuivent en scientifique)*

Rappel de la formule :

$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$ avec u et v des fonctions dérivables

La difficulté est de poser u et v' au départ pour simplifier par la suite les calculs et non pour les compliquer .

En général , quand il y a un polynôme , c'est souvent lui qu'on choisit de dériver .

Exemple 1

On veut calculer I = $\int_0^\pi x\cos x dx$

Puisqu'on a un polynôme (x) multiplié par un cosinus , on va choisir de dériver x car le calcul va se simplifier , il n'y aura plus de polynôme

On pose u = x et v' = cos x   on obtient u' = 1 et v = sin x

D'où : I = $[x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = [x\sin x]_0^\pi - [-\cos x]_0^\pi = \pi\sin\pi - 0\times\sin 0 + \cos\pi - \cos 0 = -2$

Remarque : si on avait posé u = cos x et v' = x on aurait eu v = x²/2 ce qui aurait compliqué le calcul !

Exemple 2

On veut calculer I = $\int_1^3 (x^2+1)\ln x dx$

Ici le problème est un peu différent car la « routine » voudrait que l'on pose u = x² + 1 et v' = ln x , le souci est qu'on ne connaît pas la primitive de ln x ! Donc on n'a pas le choix .

On pose u = ln x et v' = x² + 1 ,   on obtient u' = 1/x et v = x^3 / 3 + x

D'où : I =

$$\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx = 12\ln 3 - \int_1^3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx = 12\ln 3 - \left[\frac{x^3}{9}+x\right]_1^3 = 12\ln 3 - 6 + \frac{1}{9} + 1$$

= 12 ln 3 $-\dfrac{44}{9}$

Dans la rédaction , bien séparer « on pose » et « on obtient » permet de visualiser la deuxième intégrale .

Intégration

Linéarisation de fonctions trigonométriques

C'est une méthode à connaître même si elle sert rarement en terminale mais sait-on jamais !
Il faut supprimer les puissances des fonctions trigonométriques en utilisant les nombres complexes

Exemple

Calculer I = $\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$

Commençons par linéariser :

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x - 6i\sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

Donc I = $\frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin x dx - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin 3x dx = \frac{3}{4}[-\cos x]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{3}$

Aires et intégrales

- Lorsque l'énoncé demande de traduire ou d'interpréter graphiquement le nombre $\int_a^b f(x)dx$, la réponse est toujours : aire du domaine compris entre l'axe des abscisses , les droites d'équations x = a , x = b et la courbe de la fonction f .

Aire = intégrale si la fonction est positive
Aire = - intégrale si la fonction est négative .

- Attention à ne pas tomber dans le piège (classique) de calculer une aire sans avoir visualiser la courbe au moins à la calculatrice

- Vérifier au moins à la fin que le résultat est positif quand on calcule une aire

Exemple

Soit la fonction f définie par f(x) = x² - 1 . On veut calculer l'aire entre les droites d'équation x = - 1 , x = 1 , l'axe des abscisses et la courbe de la fonction f .

Pour cela , on commence par vérifier le signe de f : f(x) < 0 sur] – 1 ; 1[. Donc l'aire demandée est $-\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = 2 - \frac{2}{3}$ u.a.

- Ne pas oublier les unités lorsqu'on calcule une aire

On écrit u.a. s'il n'y a pas de précisions (unité d'aire) .
Sinon , pour convertir en cm² , on regarde bien dans l'énoncé l'unité graphique .
Si l'unité graphique est 3 cm , alors l'unité d'aire est un carré de côté 3 cm donc 9 cm² et donc 1 u.a. = 9 cm² .

Intégration

Propriétés de l'intégrale

Il faut connaître les formules de Chasles , de conservation de l'ordre , de la moyenne , de la linéarité et de la positivité .

Exercices

Exercice 1

Calculer

1) $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$
2) $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$

Exercice 2

Calculer l'aire du domaine situé sous la courbe de la fonction f(x) = 3 (x – 1) , compris entre l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = 4

Exercice 3

Calculer la valeur moyenne de la fonction f(x) = 2x + 3 sur [- 1 ; 1]

Exercice 4

Soit la fonction f(x) = e^x .

1) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et étudier leur position relative
2) Montrer que $\int_{-1}^{1} e^x dx \geq 2$

Exercice 5

1) Montrer que $e^x \geq x+1$ et en déduire que $\frac{1}{x} + \ln x \geq 1$ pour tout x de $]0;+\infty[$
2) Soit g(x) = (x + 1) ln x définie sur $]0;+\infty[$. Etudier les variations de g et ses limites aux bornes de son ensemble de définition
3) On pose pour n entier naturel non nul : $u_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$. Donner une interprétation géométrique de cette intégrale .
4) Montrer que $g(n) \leq u_n \leq g(n+1)$ pour tout n entier naturel non nul . En déduire les variations de la suite (u_n) . Cette suite converge t'elle ?

Exercice 6

Soit f la fonction définie par f(x) = x – 2 + e^{1-x} sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la droite d d'équation y = x – 2 est asymptote à la courbe de f et étudier leur position relative .
2) Déterminer l'aire du domaine compris entre d la courbe de f , les droites d'équation x = 0 et x = 8

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx$

Exercice 8

Calculer à l'aide d'intégration par parties :

1) $\int_{-1}^{1} (3x-1)e^{x+2}$
2) $\int_{1}^{e} x \ln x dx$
3) $\int_{0}^{\pi} x \cos x dx$
4) $\int_{-1}^{2} (3x+1)e^{-x} dx$