Primitives

Quelques règles de base

Déterminer une primitive nécessite de connaître **parfaitement** les formules de dérivées.
Ensuite, il faut un minimum d'observation et un peu de méthodes
Dans une fonction à primitiver se juxtaposent une fonction et une dérivée ; il faut donc pouvoir les reconnaître très rapidement. Ensuite, il faut obtenir le résultat cherché en multipliant si besoin est par une constante adéquate.
Enfin, comme c'est un nouveau type de calcul, il faut beaucoup d'entrainement pour le dominer !

La fonction dont on cherche la primitive est un quotient

- Il y a une racine dedans
  - Cette racine est au numérateur

    On pense à utiliser u^n avec n sous la forme 1/p

Exemple

Chercher une primitive de $\frac{\sqrt{2x+5}}{2}$. On commence par l'écrire sous la forme : $\frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}}}{2}$.
Ensuite, puisque la puissance est ½ , pour obtenir cette puissance après dérivation, on a du partir d'une puissance ½ + 1 = 3/2

Regardons la dérivée de $(2x+5)^{\frac{3}{2}}$ ($) : on applique la formule (u^n)' = n u' u^{n-1} , on obtient :

$$\left[(2x+5)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{2}(2)(2x+5)^{\frac{1}{2}} = 3(2x+5)^{\frac{1}{2}}$$. (*)

On regarde de nouveau l'énoncé : il y a juste une constante de différence et

$3(2x+5)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}}}{2}$ donc il faut multiplier (*) par 1/6 pour retrouver l'énoncé .

Il faut donc aussi multiplier la fonction ($) qu'on avait choisie par 1/6 et ce résultat est la primitive cherchée .

Une primitive est donc : $\frac{1}{6}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$

En résumé : puissance ½ donc on est parti de 3/2

$\times\frac{1}{6}$ ↓

Fonctions primitives	Dérivées
$(2x+5)^{\frac{3}{2}}$	$3(2x+5)^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{6}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$	$\frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}}}{2}$
Résultat	Enoncé

↓ $\times\frac{1}{6}$

- Cette racine est au dénominateur

  On pense à utiliser $\sqrt{u}$

Exemple

Trouver une primitive de $\frac{5}{3\sqrt{4x+7}}$

On est parti de la fonction $\sqrt{4x+7}$

$\times\frac{5}{6}$ ↓

Fonctions primitives	Dérivées
$\sqrt{4x+7}$	$\frac{4}{2\sqrt{4x+7}} = \frac{2}{\sqrt{4x+7}}$
$\frac{5}{6}\sqrt{4x+7}$	$\frac{5}{3\sqrt{4x+7}}$
Résultat	Enoncé

↓ $\times\frac{5}{6}$

Une primitive cherchée est donc $\frac{5}{6}\sqrt{4x+7}$

- Le quotient a un polynôme à la puissance au dénominateur

  Il faut penser à 1/u .

Exemple

Déterminer une primitive de $\frac{3x^2+6}{(x^3+6x)^2}$

On s’aperçoit que $3x^2 + 6$ est la dérivée de $x^3 + 6x$ donc on a une forme u’/u²

$\times(-1)$ ↓

Fonctions primitives	Dérivées
$\frac{1}{x^3+6x}$	$-\frac{3x^2+6}{(x^3+6x)^2}$
$-\frac{1}{x^3+6x}$	$\frac{3x^2+6}{(x^3+6x)^2}$
Résultat	Enoncé

↓ $\times(-1)$

Une primitive est donc $-\frac{1}{x^3+6x}$

Primitives

La fonction dont on cherche la primitive est un produit

C'est un polynôme à une puissance et donc on utilise la formule u^n

Exemple

Déterminer une primitive de (2x +6) (x² + 6x + 5)^5

On s'aperçoit que 2x + 6 est la dérivée de x² + 6x + 5 donc on a une forme u' u^5 , on part donc de u^6 .

	Fonctions primitives	Dérivées	
↓	(x² + 6x + 5)^6	6(2x + 6) (x² + 6x + 5)^5	↓
$\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}(x^2+6x+5)^6$	(2x + 6) (x² + 6x + 5)^5	$\times\frac{1}{6}$
	Résultat	Enoncé	

Une primitive est donc $\frac{1}{6}(x^2+6x+5)^6$.

Dernière remarque

On a vu comment déterminer **une** primitive d'une fonction donnée . Quand on demande **la** primitive ou l'ensemble des primitives , il faut ajouter une constante (+ k) .

Exercices

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition

1) $20x^3-3x+2$
2) $x^5-5x^4+7x^3-x-9$
3) $-4\sin x+3\cos x$
4) $x^2-5x+\frac{1}{x^2}$
5) $5\cos x\sin^2 x$
6) $(1+\tan^2 x)\tan^3 x$
7) $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$
8) $\frac{-1-\tan^2 x}{(\tan x+2)^3}$
9) $x^3\left(x^4+1\right)^3$
10) $\frac{-x}{\sqrt{x^2+3}}$
11) $\frac{1}{(x-1)^2}$
12) $-\frac{4}{\sqrt{1-4x}}$
13) $\cos x\sin x$
14) $\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}}$
15) $\frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$
16) $(-6x+9)(x^2-3x+2)^3$
17) $\frac{x^2+\frac{1}{3}}{\left(x^3+x+3\right)^2}$