Sommes trigonométriques

Soit n un entier ($n \geq 1$) et x un réel ($x \neq 2k\pi$ pour tout k entier relatif). On pose :
$c_n = 1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$ et $s_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$.
L'objet de ce problème est d'obtenir une formule sommatoire pour c_n et s_n et d'étudier leur comportement asymptotique lorsque n tend vers $+\infty$, pour certaines valeurs de x.

1) Montrer que pour tout réel a : $1 - e^{ia} = -2i \sin \frac{a}{2} e^{i\frac{a}{2}}$
2) On note z le complexe z = e^{ix} .
   a) Montrer que z $\neq 1$ et que $c_n + is_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$
   b) En déduire que : $c_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{nx}{2}$ et que $s_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que x = $\frac{\pi}{n}$.

3) Déduire des résultats précédents que $c_n = 0$ et $s_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$. Quelle est la limite de la suite de terme général : $\frac{s_n}{n}$?
4) On se propose de retrouver certains résultats de la question 3) sans utiliser les formules sommatoires obtenues à la question 2) .
   a) Prouver que pour $1 \leq k \leq n - 1$, le nombre $e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{(n-k)\pi}{n}}$ est un imaginaire pur et en déduire que $c_n = 0$.
   b) Soit f la fonction définie sur [0 ;1] par f(t) = $\sin(\pi t)$.
   Montrer que $\frac{s_n}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ puis que $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{n} = \int_0^1 f(t)dt$ et conclure .

D'après « Terracher, maths terminale S, Hachette)