Les limites simples de fonctions

Rappels de cours

Pourquoi les limites ?

Une fonction n'est pas toujours définie sur l'ensemble des réels .

Par exemple , la fonction f(x) = $\frac{1}{x}$ n'est pas définie en zéro . On ne peut donc pas calculer f(0) . Mais on a souvent besoin de savoir quel résultat on obtient si on prend des nombres de plus en plus voisins de 0 . On dit que l'on détermine la limite de la fonction f quand x tend vers 0 .

Les limites à retenir

Si x tend vers	$\frac{1}{x}$ tend vers	$\sqrt{x}$ tend vers	x^n tend vers
0	∞	0	0
$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	0	Non définie	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair

Pour les sommes , produits et quotients , se référer aux formules du livre .

Si f est définie en a , la limite de f quand x tend vers a est f(a) .

Il faut souvent en plus étudier le signe de f(x) lorsque le dénominateur tend vers 0 pour conclure si f tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple

Etudier la limite de f(x) = $\frac{x-1}{x-2}$ quand x tend vers 2 .

Réponse : x – 1 est défini en 2 donc $\lim_{x\to 2} x-1=1$; mais $\lim_{x\to 2} x-2=0$ donc la limite de f est $-\infty$ ou $+\infty$.

Etude du signe de f :

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
f(x)	+ - +

On peut donc conclure :

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ car la fonction f est négative au voisinage de 2 par valeurs inférieures (trait ___) .

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ car la fonction f est positive dans le voisinage de 2 par valeurs supérieures (trait ___)

Les formes indéterminées

Il y a quatre cas de formes indéterminées :

$\infty\times 0$ $-\infty+\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

Les limites simples de fonctions

Asymptotes

- Lorsque l'énoncé demande une interprétation graphique dans une question de limite , il faut préciser l'asymptote .

Asymptote horizontale d'équation y = a si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$

Asymptote verticale d'équation x = b si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$

Exemple

Dans l'exemple précédent , la courbe de la fonction f admet pour asymptote verticale la droite d'équation x = 2 .

Pour lever une indétermination

Il y a plusieurs méthodes qui sont détaillées en cours ; voici pour rappel la liste de ces méthodes :

Factoriser par la puissance de x du plus haut degré
Multiplier par le conjugué quand il s'agit de racines
Utiliser le théorème des gendarmes
Utiliser le nombre dérivé

Limites de fonctions composées

Il faut détailler les raisonnements : c'est plus clair pour le correcteur et il y a moins de risque de se perdre

Le principe : on cherche la limite de façon progressive

Exemple

Déterminer la limite en $+\infty$ de f(x) = $\sqrt{x+3}$. On commence par chercher la limite en $+\infty$ de x + 3 puis on cherche la limite de la racine en ce résultat :

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ x + 3 = $+\infty$, de plus $\lim\limits_{u\to+\infty} \sqrt{u} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $+\infty$

Dans sa tête , mais pas sur le papier , on peut dire $\sqrt{+\infty} = +\infty$

Les limites simples de fonctions

Exercices

Exercice 1

1) Etudier la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{x^2-3}{\sqrt{x}}$
2) Etudier la limite quand x tend vers 4 de $\dfrac{2x+3}{4-x}$
3) Etudier la limite de $x^2 - x + 3$ quand x tend vers $+\infty$
4) Etudier la limite de $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+4}$ quand x tend vers $+\infty$
5) Etudier la limite de $\dfrac{1}{x+3}$ quand x tend vers $+\infty$
6) Etudier la limite de $\sqrt{x-1}$ quand x tend vers $+\infty$
7) Etudier la limite de $-x^4+3x+1$ en $-\infty$ et en $+\infty$
8) Etudier la limite de $4x^3+5x^2-1$ en $-\infty$ et en $+\infty$
9) Etudier la limite en chaque borne de l'ensemble de définition de $\dfrac{x^2+4x+2}{x-1}$

Exercice 2

f et g sont des fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par f(x) = $2+\dfrac{1}{x^2}$ et g(x) = $2-\dfrac{1}{x^2}$.

1) Etudier la limite de f et de g en $+\infty$
2) Interpréter graphiquement ce résultat
3) Tracer dans un même repère les deux courbes

Exercice 3

Soit f la fonction définie par f(x) = $\dfrac{\cos x}{x^2}$ définie pour x $\neq 0$.

1) Montrer que $-\dfrac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$ pour tout x $\neq 0$
2) En déduire la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 4

Pour chaque proposition , trouver des exemples de fonctions f et g

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -3$

Exercice 5

Soit la fonction g définie sur R – $\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ par g(x) = $\dfrac{\sin x - 1}{x-\dfrac{\pi}{2}}$. En utilisant la formule du nombre dérivé avec une fonction judicieusement choisie , étudier la limite de g en $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 6

Donner les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes et en déduire d'éventuelles asymptotes

1) $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2}$
2) $f(x)=\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2+x-2}$
3) $f(x)=\dfrac{-x^3+2x-4}{x+1}$
4) $f(x)=\dfrac{(2x+1)^3}{(-x+2)^3}$
5) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$
6) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x-1$
7) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$
8) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$
9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{4x^2-4x+8}}$
10) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$
11) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sin x}$
12) $f(x)=x^2(10+\cos x)$

Exercice 7

Donner les limites des fonctions suivantes et en déduire d'éventuelles asymptotes :

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-2}$ en -1 et en 2
2) $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2}$ en 1
3) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2(x-1)}$ en 1
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ en 1
5) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$ en 0
6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ en 0
7) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ en 0
8) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$ en 0

Exercice 11

Sans calculer la limite , dire si on est dans le cas d'une forme indéterminée :

1) $f(x)=2x-1+\sqrt{x}$ en $+\infty$
2) $f(x)=x^3-5x^2+3$ en $-\infty$
3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ en $+\infty$
4) $f(x)=2x+\sqrt{x^2+3}$ en $+\infty$
5) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{\frac{1}{x}}$ en $-\infty$
6) $f(x)=\sqrt{\sin x}$ en $\dfrac{\pi}{2}$