Corrigé des limites simples de fonctions

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0}x^2-3=-3$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3}{\sqrt{x}}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 4}2x+3=11$ et $\lim\limits_{x\to 4}4-x=0$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f(x)	+		-

Donc $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x+3}{4-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x+3}{4-x}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2=+\infty$ donc on a une FI on factorise par le degré de x le plus haut

$x^2-x+3=x^2\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$ et on a $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}=1$ et

$\lim\limits_{x\to +\infty}x^2-x+3=+\infty$

4) FI car + ∞ - ∞

$\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+4}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+4}}$ et on a

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+4}}=0$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}x+3=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x+3}=0$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}x-1=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$

7) Etude en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to -\infty}x^4=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty}-x^4=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}3x+1=-\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to -\infty}-x^4+3x+1=-\infty$

Etude en + ∞ : avec la même étude que précédemment on arrive à une FI donc on va factoriser par le degré le plus haut : $-x^4+3x+1=x^4\left(-1+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)$. Or

$\lim\limits_{x\to +\infty}-1+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}=-1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}x^4=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}-x^4+3x+1=-\infty$

8) Etude en + ∞ : $\lim\limits_{x\to +\infty}4x^3=\lim\limits_{x\to +\infty}3x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}4x^3+5x^2-1=+\infty$

Etude en $-\infty$: FI donc factorisation : $4x^3+5x^2-1=x^3\left(4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$ or

$\lim\limits_{x\to -\infty}4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^3}=4$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}x^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty}4x^3+5x^2-1=-\infty$

9) Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $\dfrac{x^2+4x+2}{x-1}=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x\left(\dfrac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\right)$

Corrigé des limites simples de fonctions

Or $\lim_{x\to\pm\infty} 1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Etudions maintenant les limites en 1^- et en 1^+ . Tout d'abord : $\lim_{x\to 1} x^2+4x+2 = 7$. Etudions le signe de x – 1 : si x > 1 , alors x – 1 > 0 donc : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

Exercice 2

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$
2) Les courbes de f et de g admettent une asymptote horizontale d'équation y = 2

Exercice 3

1) On sait que $-1 \le \cos x \le 1$ et de plus $x^2 > 0$ d'où l'encadrement
2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ donc par le théorème des gendarmes , $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Exercice 4

1) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$
2) $f(x) = -x^2$ et $g(x) = x$
3) $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$
4) $f(x) = -3x^2$ et $g(x) = x^2$

Exercice 5

On choisit f(x) = sin x . La formule du nombre dérivé donne puisque f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = f'(\frac{\pi}{2}) \text{ d'où : } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x-\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Exercice 6

1) $f(x) = \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2} = \dfrac{2-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$.

   De plus $\lim_{x\to\infty} \frac{8}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 0$. Donc $\lim_{x\to\infty} 2-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2} = 2$ et $\lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2} = 1$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

   On en conclut que la droite d'équation y = 2 est asymptote horizontale à la courbe de f .

Corrigé des limites simples de fonctions

2) $f(x)=\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2+x-2}=\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$.

De plus $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to\infty}-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=-2$ et $\lim\limits_{x\to\infty}1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}=1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$.

On en conclut que la droite d'équation y = - 2 est asymptote horizontale à la courbe de f .

3) $f(x)=\dfrac{-x^3+2x-4}{x+1}=x^2\dfrac{-1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}}$.

De plus $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to\infty}-1-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}=-1$ et $\lim\limits_{x\to\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$. Or $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

4) $f(x)=\dfrac{(2x+1)^3}{(-x+2)^3}=\left(\dfrac{2x+1}{-x+2}\right)^3=\left(\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{-1+\dfrac{2}{x}}\right)^3$.

On a : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{-1+\dfrac{2}{x}}=-2$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{-1+\dfrac{2}{x}}\right)^3=-8$.

On en conclut que la droite d'équation y = - 8 est asymptote horizontale à la courbe de f .

5) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+1=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = $+\infty$.

$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ en utilisant la forme conjuguée . Et par un raisonnement semblable au précédent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = 0.

On en conclut que la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe de f

6) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x-1$.

Comme dans le 5) , on peut calculer directement la limite en $-\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = $+\infty$.

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x-1=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}$ et comme dans le 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = 0.

On en conclut que la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe de f

Corrigé des limites simples de fonctions

7) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}=\dfrac{-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}$.

Or $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = 0.

On en conclut que la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe de f

8) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{4x^2-4x+8}}=\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}}{\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{8}{x^2}}=\sqrt{4}=2$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = $\dfrac{1}{2}$.

On en conclut que la droite d'équation y = $\dfrac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe de f .

10) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sin\frac{1}{x}-\sin 0}{\frac{1}{x}-0}$ donc par définition du nombre dérivé de sin x en 0 car $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = cos 0 = 1 .

On en conclut que la droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe de f

11) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sin x}$.

$-1\le\sin x\le 1$ donc $1\le 2-\sin x\le 3$ et $\dfrac{x}{3}\le f(x)\le x$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{3}=-\infty$ et par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = $-\infty$.

De même , $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $+\infty$.

12) $f(x)=x^2(10+\cos x)$. On encadre également : $9x^2\le f(x)\le 11x^2$ et par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = $+\infty$

Exercice 7

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-2}=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$.

(x + 1) (x – 2) < 0 sur] – 1 ; 2 [donc $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)(x-2)=\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)(x-2)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)(x-2)=\lim\limits_{x\to2^+}(x+1)(x-2)=0^+$

de plus $\lim\limits_{x\to-1}x-1=-2$ et $\lim\limits_{x\to2}x-1=1$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$.

On en conclut que la courbe de f admet deux asymptotes verticales les droites d'équation x = - 1 et x = 2

Corrigé des limites simples de fonctions

2) $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2}=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2(x-3)}{x+2}$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=-\dfrac{4}{3}$

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2(x-1)}$ ≥ 0 si x ≥ 1 et $\lim\limits_{x\to 1}(x-2)^2(x-1)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.
On en conclut que la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f .

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-2}$.
$\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x+3}-2=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x+3}-2=0^+$ d'où : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.
On en conclut que la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f .

5) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$. On encadre : $-x\leq f(x)\leq x$ et par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}$ et par définition du nombre dérivé de la fonction sin x en 0 on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\cos 0=1$

7) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}=\dfrac{\cos 0-\cos x}{x-0}=-\left(\dfrac{\cos x-\cos 0}{x-0}\right)$ et par définition du nombre dérivé de la fonction cos x en 0 on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-(-\sin 0)=0$

8) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\dfrac{1-\cos x}{x}\times\sqrt{x}$ et par la question 7) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Exercice 8

1) Non $+\infty++\infty\ =\ +\infty$
2) Non $-\infty-\infty=-\infty$
3) Oui $+\infty/+\infty$
4) Non $+\infty++\infty=+\infty$
5) Non $f(x)=\dfrac{x^3+1}{\frac{1}{x}}=x\left(x^3+1\right)$
6) Non $\sqrt{1}=1$