Corrigé le nombre d'or

A) 1) $\Delta = 5$ donc x = $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et x' = $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \mathrm{f}$.

2) f est solution de x² - x + 1 = 0 donc $\mathrm{f}^2 - \mathrm{f} + 1 = 0$ d'où la première égalité . On obtient la deuxième en divisant les deux membres de la première par f qui est non nul . Puisque f est positif , f +1 aussi et on peut prendre la racine dans les deux membres de la première égalité ce qui donne la troisième . Et enfin : $\mathrm{f}(2\mathrm{f}-1) = 2\mathrm{f}^2 - \mathrm{f} = \mathrm{f}^2 + \mathrm{f}^2 - \mathrm{f} = \mathrm{f}^2 + 1$ par la première égalité .

B)

1) vrai au rang n = 0 ; supposons que $\dfrac{3}{2} \le a_n \le 2$ alors on a : $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{a_n} \le \dfrac{2}{3}$ et

$1+\dfrac{1}{2} \le 1+\dfrac{1}{a_n} \le 1+\dfrac{2}{3}$ c'est-à-dire : $\dfrac{3}{2} \le a_{n+1} \le \dfrac{5}{3} \le \dfrac{6}{3} = 2$. Donc on a montré l'encadrement par récurrence .

2) $a_{n+1} - \mathrm{f} = 1+\dfrac{1}{a_n} - \mathrm{f} = 1+\dfrac{1}{a_n} - 1 - \dfrac{1}{\mathrm{f}} = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{\mathrm{f}} = \dfrac{\mathrm{f} - a_n}{\mathrm{f}a_n}$ car $\mathrm{f} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{f}}$. De plus , f vérifie le même encadrement que a_n , donc : $\dfrac{9}{4} \le \mathrm{f}a_n \le 4$ et donc $\left|a_{n+1} - \mathrm{f}\right| \le \dfrac{4}{9}\left|a_n - \mathrm{f}\right|$.

3) vrai au rang 1 ; supposons que $\left|a_n - \mathrm{f}\right| \le \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\left|a_1 - \mathrm{f}\right|$ alors par la question précédente : $\left|a_{n+1} - \mathrm{f}\right| \le \dfrac{4}{9}\left|a_n - \mathrm{f}\right| \le \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\left|a_1 - \mathrm{f}\right| \le \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n}\left|a_1 - \mathrm{f}\right|$.

De plus : $a_1 - \mathrm{f} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{18-9\sqrt{5}}{18} \le \dfrac{8}{18}$ car $10 - 9\sqrt{5} \le 10 - 9\sqrt{4} \le 0$ d'où la deuxième égalité .

4) par la question 3) on a : $-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n \le a_n - \mathrm{f} \le \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$; or les suites $-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ et $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ sont des suites convergentes vers 0 car $\left|\dfrac{4}{9}\right| < 1$ donc par le théorème des gendarmes , la suite ($a_n - \mathrm{f}$) est convergente et tend vers 0 d'où la suite (a_n) est convergente et tend vers f .

5) Cela revient à résoudre

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n \le 10^{-6} \Leftrightarrow n\ln\frac{4}{9} \le -6\ln 10 \Leftrightarrow n \ge \frac{-6\ln 10}{\ln\frac{4}{9}} \Leftrightarrow n \ge 17{,}03 .$$

C)

1) $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n + 1} - b_n = \dfrac{b_n + 1 - b_n^{\ 2}}{\sqrt{b_n+1} + b_n}$. Etudions le signe de – (b_n^2 - b_n -1) . Par A)1) – (b_n^2 - b_n -1) < 0 si $\mathrm{f} \le b_n$. Montrons donc $\mathrm{f} \le b_n \le 2$ par récurrence . Le rang n = 0 est vérifié . Supposons $\mathrm{f} \le b_n \le 2$ alors $\mathrm{f}+1 \le b_n + 1 \le 3$ et

Corrigé le nombre d'or

$\sqrt{\varphi+1} \leq \sqrt{b_n+1} \leq \sqrt{3}$ ce qui donne en utilisant A)2) : $\varphi \leq b_{n+1} \leq \sqrt{3} \leq 2$. ce qui prouve à la fois $\varphi \leq b_n \leq 2$ et $b_{n+1} - b_n < 0$.

2) (b_n) est décroissante et minorée par φ donc elle converge .

3) $b_{n+1} - \varphi = \sqrt{b_n+1} - \sqrt{\varphi+1} = \dfrac{b_n - \varphi}{b_{n+1}+\varphi} \geq 0$ par 1) ; de plus , $\dfrac{3}{2} \leq \varphi$ et $b_{n+1} + \varphi \geq 2\varphi$

donc $\dfrac{1}{b_{n+1}+\varphi} \leq \dfrac{1}{2\varphi} \leq \dfrac{1}{3}$

4) Par récurrence ; vrai pour n = 1 ; on suppose que $0 \leq b_n - \varphi \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Alors :

$b_{n+1} - \varphi \leq \dfrac{1}{3}(b_n - \varphi) \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$. Le « positif » est obtenu par 3) . La suite $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est convergente et tend vers 0 donc par le théorème des gendarmes , la suite (b_n) tend vers φ .

5) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n\ln\dfrac{1}{3} \leq -6\ln 10 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{-6\ln 10}{-\ln 3} \Leftrightarrow n \geq 12{,}5$

D) 1) $c_1 = \dfrac{5}{3}$ et $c_2 = \dfrac{34}{21}$

2) $f(\varphi) = \varphi$ par A2) dernière égalité . $f'(x) = \dfrac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$ or φ solution de $x^2 - x - 1 = 0$ donc $f'(\varphi) = 0$. On sait par partie A que $x^2-x-1>0$ si $x > \varphi$. $(2x-1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[\varphi ; +\infty[$ .et sur cet intervalle f croissante . On en déduit que f admet un minimum en φ . L'encadrement de la suite est vérifié au rang n = 0 . Supposons $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$. Puisque f est croissante sur $[\varphi ; +\infty[$, on a : $f(\varphi) \leq f(c_{n+1}) \leq f(c_n) \leq f(2)$ ce qui donne : $\varphi \leq c_{n+2} \leq c_{n+1} \leq \dfrac{5}{3} \leq \dfrac{6}{3} \leq 2$. (c_n) est donc une suite décroissante et minorée par φ ; elle est donc convergente .

3) $c_{n+1} - \varphi = \dfrac{c_n^2+1}{2c_n-1} - \varphi = \dfrac{c_n^2+1-2c_n\varphi+\varphi}{(2c_n-1)} = \dfrac{c_n^2-2c_n\varphi+\varphi^2}{(2c_n-1)} = \dfrac{(c_n-\varphi)^2}{(2c_n-1)}$. Or , $c_n \geq \dfrac{3}{2}$, donc $2c_n - 1 \geq 2$.

4) Vrai pour n = 0 . supposons vrai au rang n . Alors :

$c_{n+1} - \varphi \leq \dfrac{1}{2}[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+...+2^n}]^2 \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2+2^2+...+2^{n+1}} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+...+2^{n+1}}$. Par le théorème des gendarmes $c_n - \varphi$ tend vers 0 et donc (c_n) tend vers φ .

<u>Corrigé le nombre d'or</u>

5) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$ et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1} \leq 10^{-153} \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 509 \Leftrightarrow n+1 \geq 9 \Leftrightarrow n \geq 8$$