Corrigé limites logarithme népérien

1) $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x=\ln x\left(\frac{1}{x\ln x}-1\right)$. $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0^-$ par croissance comparée donc

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x\ln x}-1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$. La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation x = 0 .

2) $f(x)=\frac{\ln x+2}{\ln x-1}=\frac{\ln x\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)}=\frac{1+\frac{2}{\ln x}}{1-\frac{1}{\ln x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{2}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{\ln x}=1$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 1

3) $f(x)=x^2+x-4-\ln x=\ln x\left(\frac{x^2}{\ln x}+\frac{x}{\ln x}-\frac{4}{\ln x}-1\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$ par croissance comparée .

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{\ln x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4) $f(x)=\frac{\ln x-3x}{2x^3}=\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x^3}-\frac{3}{2x^2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2x^2}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0

5) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}=2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ par croissance comparée et donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 .

Attention , la croissance comparée n'est pas utilisable directement car la puissance de x doit être un entier naturel (ici , n = ½ non entier)

6) $f(x)=\ln(\ln x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$ et $\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$. La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation x = 1 .

7) $f(x)=\ln(1-2x)$ est définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}1-2x=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}1-2x=0^+$ et $\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=-\infty$. La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation x = $\frac{1}{2}$.

8) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x + 1 =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

9) $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et ln 1 = 0 donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 .

$\lim\limits_{x \to 0} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation x = 0 .

10) $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$ définie sur $]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-5}{x+2} = \frac{1 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$ et ln 1 = 0 donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 .

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x-5}{x+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation x = - 2 .