Corrigé exercices sur la fonction ln

Exercice 1

1) Etude de f_1

On a $f_1(x) = x\ln x$ si x > 0 et $f_1(0) = 0$.

Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = f_1(0)$ et la fonction est continue en 0

Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ la fonction n'est pas dérivable en 0 et sa courbe présente une tangente verticale au point d'abscisse 0

Variations : la fonction f_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$. On a : $f_1'(x) = \ln x + 1$

On a : $\ln x + 1 \geq 0$ équivaut aux lignes suivantes

$\ln x \geq -1$

$x \geq e^{-1}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante et $e^{\ln x} = x$

On a donc la fonction f_1 est croissante sur $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$

Limite en $+\infty$ *:* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

Etude de f_0

On a $f_0(x) = x(-1+\ln x)$ si x > 0 et $f_0(x) = 0$

Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} x(-1+\ln x) = \lim\limits_{x\to 0} -x + x\ln x = 0 = f_0(0)$ par croissance comparée donc la fonction est continue en 0

Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} -1+\ln x = -\infty$ la fonction n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0

Variations : la fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$. Calculons

$f_0'(x) = -1 + \ln x + 1 = \ln x$ > 0 si x > 1 . La fonction est donc croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]0;1]$

Limite en $+\infty$ *:* $\lim\limits_{x\to+\infty} x(-1+\ln x) = +\infty$

Etude de f_n

$f_n(x) = x(n-1+\ln x)$ si x > 0 et $f_n(0) = 0$

Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} x(n-1) + x\ln x = 0 = f_n(0)$ par croissance comparée donc la fonction est continue en 0

Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} n-1+\ln x = -\infty$ donc la fonction n'est pas dérivable mais sa courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0

Variations : la fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$. Calculons la dérivée :

$f_n'(x) = n-1+\ln x + 1 = n + \ln x$

$n + \ln x \geq 0$ équivaut aux lignes suivantes :

$\ln x \geq -n$

$x \geq e^{-n}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante .

La fonction f_n est donc croissante sur $[e^{-n};+\infty[$ et décroissante sur $]0;e^{-n}]$.

Limite en $+\infty$ *:* $\lim\limits_{x\to+\infty} x(n-1+\ln x) = +\infty$

2) La tangente est horizontale si la dérivée est nulle donc I_n a pour abscisse e^{-n} et pour ordonnée $e^{-n}(n-1-n) = -e^{-n}$. Les points I_n appartiennent donc à la droite d'équation y = - x .

3) Soit M un point de C_n .Cherchons son image M' par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{e}$

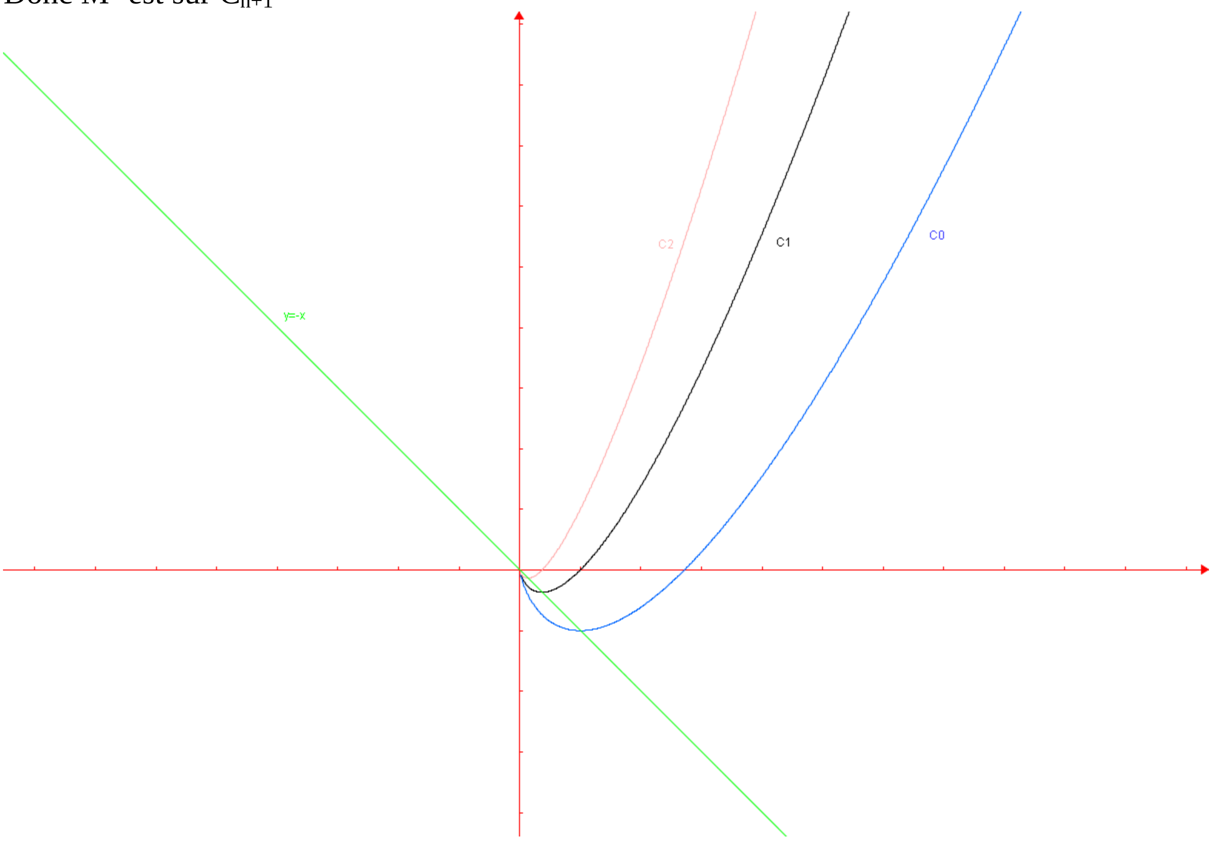
Passons par l'écriture complexe : on note z l'affixe de M et z' l'affixe de M'

$z' = x' + iy' = \frac{1}{e} z = \frac{1}{e}\left(x + ix(n - 1 + \ln x)\right)$. Identifions les parties réelles et imaginaires :

$x' = \frac{x}{e}$ et

$y' = \frac{x(n-1+\ln x)}{e} = \left(\frac{x}{e}\right)\left(n - 1 + \ln\left(\frac{x}{e}\right) + \ln e\right) = x'\left(n - 1 + \ln x' + 1\right) = x'(n + \ln x') = f_{n+1}(x')$

Donc M' est sur C_{n+1}



Exercice 2

1) On a $f_1(x) = xe^{-x^2}$. On a $f_1'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ est du signe de 1 – 2x²

$\lim_{x \to 0} f_1(x) = f_1(0) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\left(-x^2 e^{-x^2}\right) = 0$ par croissance comparée

La courbe admet donc une asymptote horizontale , l'axe des abscisses .

D'où le tableau :

Corrigé exercices sur la fonction ln

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

$f_1(x)-x = xe^{-x^2}-x = x\left(-1+e^{-x^2}\right) < 0$ donc la courbe est en dessous de la droite d .
Or la tangente en au point d'abscisse 0 est y = x donc d est la tangente à C_1 au point d'abscisse 0

2) On a $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ d'où : $f_3'(x) = e^{-x^2}(3x^2-2x^4) = x^2e^{-x^2}(3-2x^2)$ du signe de $3-2x^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left((x^2)^2e^{-x^2}\right) = 0$ par croissance comparée . La courbe admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale .

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f_3(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	0

Calculons $f_3(x)-f_1(x) = xe^{-x^2}(x^2-1) = xe^{-x^2}(x-1)(x+1)$ du signe de x – 1 donc la courbe C_3 est au dessus de C_1 si x > 1 .

3) $f_n'(x) = e^{-x^2}(nx^{n-1}-2x^{n+1}) = x^{n-1}e^{-x^2}(n-2x^2)$.

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

On a $S_2(1\ ;\ \frac{1}{e})$. $f_n(1) = 1^n e^{-1^2} = \frac{1}{e}$ donc toutes les courbes C_n passent par S_2 .

4) $g(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\left(-1+\ln\frac{x}{2}\right)\right)$. On a $g'(x) = \left(\frac{1}{2}\left(-1+\ln\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)g(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{2}g(x)$ est du signe de $\ln\frac{x}{2}$ car g(x) > 0

La fonction g est donc croissante si x > 2

On veut montrer que : $\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} > \frac{1}{e}$ c'est équivalent aux lignes suivantes :

$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} > \frac{1}{e}$

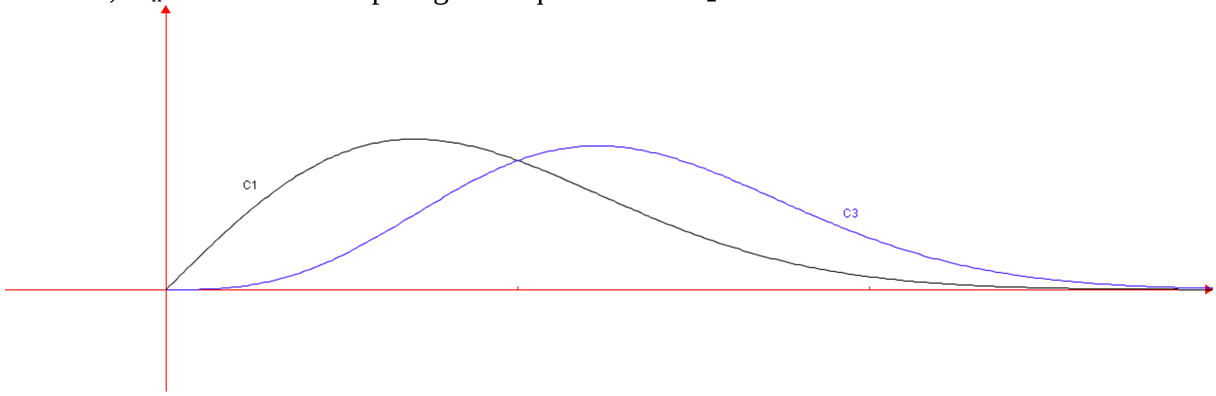
$e^{\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}} > \frac{1}{e}$

$\exp\left(\frac{n}{2}(-1+\ln\frac{n}{2}\right) > \frac{1}{e}$

g(n) > $\frac{1}{e}$

or g est croissante si x > 2 et g(2) = $\frac{1}{e}$ donc si x > 2 , g(x) > $\frac{1}{e}$.

si n > 2 , S_n a son ordonnée plus grande que celle de S_2 .



Exercice 3

1) Posons f(x) = $\ln(1+x)-x$. Calculons $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{x+1}$. La fonction f est donc croissante sur]-1 ;0[et décroissante sur $]0;+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 0 et f(0) = 0 donc f(x) ≤ 0 donc $\ln(1+x)\leq x$ si x > - 1
2) On pose x = $\frac{1}{n}$ d'où en appliquant la question 1) : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$

   C'est équivalent aux lignes suivantes :

   $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq 1$

   $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \ln e$

   $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$ car la fonction ln est strictement croissante
3) Posons g(x) = ln (1 – x) + x définie si x < 1 . Alors $g'(x)=\frac{-1}{1-x}+1=\frac{-x}{1-x}$. La fonction g est donc croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur]0 ;1[. Elle admet donc un maximum en 0 et g(0) = 0 donc g(x) ≤ 0 et $\ln(1-x)\leq -x$

   On pose x = $\frac{1}{n}$. Si n > 1 , alors x < 1 et on peut appliquer l'inégalité : $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq -\frac{1}{n}$

   Ce qui équivaut aux lignes suivantes :

   $-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\geq 1$

$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \geq \ln e$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \geq e$ car ln x est strictement croissante

4) On a $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \geq e$ ce qui équivaut aux lignes suivantes :

$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} \geq e$

$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \geq e$ pour tout n . On l'écrit au rang n + 1 et on obtient : $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq e$

5) Ce sont les résultats obtenus dans les questions 2 et 4

6) On a $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ donc $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} - v_n \leq e - v_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ d'où

$0 \leq e - v_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)$ soit $0 \leq e - v_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n}$

Or on a montré que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \leq e$ donc $0 \leq e - v_n \leq \frac{e}{n}$

Par le théorème des gendarmes, e – v_n converge vers 0 et donc (v_n) converge vers e