Corrigé indispensables ln

Partie A

1) a) f(x) = 0 est équivalente aux lignes suivantes en posant ln x = X

$2X^2 - X - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$ donc X' = $\frac{3}{2}$ ou X'' = - 1 donc x' = $e^{\frac{3}{2}}$ ou x'' = $\frac{1}{e}$

b) Avec le même changement de variable , on a X ∈ $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante , x ∈ $\left]0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) a) On a f(x) = $-3 - \ln x + 2(\ln x)^2$.

$\lim_{x\to 0} -\ln x = \lim_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$f(x) = (\ln x)^2\left(-\frac{3}{(\ln x)^2} - \frac{1}{\ln x} + 2\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{(\ln x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ donc

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

b) On a f '(x) = $-\frac{1}{x} + 4\frac{1}{x}\ln x = \frac{1}{x}(4\ln x - 1)$

c) Sur $\left]0;+\infty\right[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc f '(x) est du signe de 4 ln x – 1 .

On a : 4 ln x – 1 > 0 si x > $e^{\frac{1}{4}}$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{\frac{1}{4}}$		+ ∞
f '(x)		-	0	+	
f(x)	+ ∞	↘	$-\frac{25}{8}$	↗	+ ∞

$f\left(e^{\frac{1}{4}}\right) = -3 - \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{25}{8} \approx -3{,}1$

3) On a : $y = f'\left(e^{\frac{5}{4}}\right)\left(x - e^{\frac{5}{4}}\right) + f\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$ qui donne : $y = \frac{4}{e^{\frac{5}{4}}}\left(x - e^{\frac{5}{4}}\right) + \left(-3 - \frac{5}{4} + 2\left(\frac{25}{16}\right)\right)$

soit $y = 4e^{-\frac{5}{4}}x - 4 - 3 - \frac{5}{4} + \frac{25}{8}$ d'où : $y = 4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}$

4) a) On a g(x) = $f(x) - \left(4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right)$ donc g'(x) = $f'(x) - 4e^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{x}(4\ln x - 1) - 4e^{-\frac{5}{4}}$

Donc g''(x) = $-\frac{1}{x^2}(4\ln x - 1) + \frac{1}{x}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(5 - 4\ln x)$

b) On a donc g''(x) > 0 si x < $e^{\frac{5}{4}}$ et donc g'(x) est croissante sur $\left]0;e^{\frac{5}{4}}\right[$ et décroissante sur $\left]e^{\frac{5}{4}};+\infty\right[$. De plus $g'\left(e^{\frac{5}{4}}\right)=0$ donc g'(x) < 0 car son maximum est nul

c) On a $g\left(e^{\frac{5}{4}}\right)=0$ car la tangente et la courbe se coupent en cette abscisse .

Puisque g' < 0 , alors g est décroissante et donc sur $\left]0;e^{\frac{5}{4}}\right[$, g > 0 et sur $\left]e^{\frac{5}{4}};+\infty\right[$, g < 0 .

Donc sur $\left]e^{\frac{5}{4}};+\infty\right[$, la courbe C est sous la tangente T