Exercices sur la fonction logarithme népérien

Exercice 1

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = x(n-1+\ln x)$ si x > 0 et $f_n(0) = 0$. On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 5 cm)

1) Etudier la fonction f_1 (continuité en 0 , dérivabilité en 0 , variations , limites) . Puis étudier de même f_0 et f_n . Tracer C_0 et C_1 .
2) Soit I_n le point de C_n où la tangente est horizontale . Montrer que si n varie les points I_n sont tous situés sur la même droite
3) Montrer que C_{n+1} est l'image de C_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{e}$. Tracer alors C_2 .

Exercice 2

Soit la famille de fonctions définie sur $[0;+\infty[$ pour tout entier naturel non nul n par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note C_n sa courbe représentative .

1) Dresser le tableau de variations de f_1 . Etudier la position de la courbe C_1 par rapport à la droite d d'équation y = x . Que représente d ? Tracer C_1
2) Dresser le tableau de variations de f_3 . Déterminer la position relative entre C_1 et C_3 . Tracer C_3
3) Etudier les variations de f_n . On note S_n le point de C_n d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Montrer que pour tout n , C_n passe par S_2 .
4) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\left(-1+\ln\dfrac{x}{2}\right)\right)$. Etudier les variations de g . Montrer que pour tout n , S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2

Exercice 3

1) Montrer que pour tout réel x > -1 : $\ln(1+x) \le x$
2) En déduire que pour tout entier $n \ge 1$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \le \dfrac{1}{n}$ et $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \le e$
3) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$, $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \ge e$
4) Montrer que pour tout entier $n \ge 1$, $e \le \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$
5) En déduire pour tout $n \ge 1$ l'encadrement : $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \le e \le \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$
6) Soit la suite définie pour tout $n \ge 1$ par $v_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$. Montrer que $0 \le e - v_n \le \dfrac{e}{n}$ pour tout $n \ge 1$. En déduire que (v_n) converge et donner sa limite